

3.21 流体流动及流体动力学

Adam Powell

2003 年 4 月 23 - 30 日

摘要

材料科学与工程主要研究材料的结构性能以及加工工艺之间的关系。加工工艺对结构的影响主要是通过反应动力学，相变化以及传质传热来实现的。通常一个过程的关键控制步骤是对某单元提供足够的能量或试剂，而试剂或能量常常又是通过流体传递的，因此流体流动对能量以及质量的传递速率有很大的影响。由于在流体流动时既有扩散又有对流，而且对流流动时流体速度对浓度和温度分布有影响，因此流体流动中的传质和传热要比在固体中的复杂。另外，非线性的对流传递将导致湍流的发生。湍流的本质是对流，可以强化质量、热量及动量的扩散。

在接下来的四讲中将会介绍流体动力学的一些概念：动量传递，对流流动，流体性质的封闭方程（奈维-斯托克斯方程），耦合流动，溶质/热量在流体中的扩散以及湍流流动及输送。最后将介绍一定流动状态下流体与简单集合形状固体之间的传质、传热系数的计算方法，并将其扩展到较复杂的情况。通过本部分的学习，将会使读者对于流体输送中的流体动力学具有较深的了解，并得到系统的动力学知识。

目录：

1. 动量扩散、剪应力、压力和斯托克斯流动	3
1.1 溶质扩散及热量扩散简介	3
1.2 速度矢量场及动量扩散张量	3
1.3 动量扩散与机械应力的关系	4
1.4 斯托克斯流动	5
1.4.1 的分解方程	5
1.4.2 密度的表达式	6
1.4.3 质量守恒与连续性方程	6
1.4.4 简化的封闭斯托克斯流动方程	6
1.5 溶质扩散、热量扩散及动量扩散小结	7
1.6 例题	7
1.6.1 库爱特流动	7
1.6.2 由于重力作用沿倾斜面的流动	8
1.6.3 绕过球体的流动	9
1.7 练习	9
2. 随体导数及奈维-斯托克斯方程	9
2.1 随体导数	10
2.1.1 例题 热传导、对流、熔化	11

2.2 流体流动方程中的对流项-----	12
2.2.1 连续性方程-----	12
2.2.2 动量对流-----	12
2.2.3 奈维—斯托克斯方程-----	13
2.2.4 例题 :圆管内流动-----	14
2.3 雷诺数-----	14
2.3.1 例题 :绕球体的流动-----	14
2.4 湍流的形成-----	14
2.5 练习-----	14
3 层流边界层与曳力系数-----	15
3.1 简例 :运动固体的“ 热边界层 ”-----	16
3.2 经典流动范例 :平板上流动-----	16
3.2.1 平壁上流动的动量边界层-----	17
3.2.2 边界层与入口长度-----	18
3.2.3 平壁上层流流动时曳力-----	18
3.3 摩擦因数-----	19
3.3.1 平板上摩擦因数-----	19
3.3.2 管内流动-----	20
3.3.3 绕球体流动-----	21
3.3.4 绕柱体流动-----	21
3.4 练习-----	21
4 传热和传质系数的计算-----	22
4.1 对流传热和传质系数-----	23
4.1.1 相对扩散系数 :普朗特数-----	23
4.1.2 无量纲传递系数 :努塞尔数-----	23
4.2 平壁强制对流-----	24
4.2.1 普朗特数小的情况-----	24
4.2.2 普朗特数大的情况-----	25
4.2.3 湍流的影响-----	25
4.3 自然对流-----	25
4.4 小结 :求解步骤-----	26
4.5 练习-----	26
无量纲数群组小结-----	26

1. 动量扩散、剪应力、压力和斯托克斯流动

因为由剪切力引起的动量传递速率与动量梯度成正比，所以粘性剪切是一个扩散过程，这和溶质及热量扩散非常相似。本章首先简单回顾溶质扩散和热量扩散，介绍动量扩散的概念，剪应力张量的表达及压力的作用，并得到封闭系统的斯托克斯流动方程：斯托克斯流动方程是一个偏随体导数，其中的标量和矢量分别描述低速流体流动系统的压力与速度。

1.1 溶质扩散和热量扩散简介

在溶质扩散中，有一个浓度场 $C(x, y, z)$ ，单位是摩尔（或者克）/单位体积；通量 \vec{J} ，单位是摩尔/（单位面积单位时间），因此守恒方程可以写作：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} + G \quad (1)$$

注：当忽略动量的对流传递时，斯托克斯流动依然成立（2.3 节中）。

式中， G 是由于化学物质、原子或由其它物质产生的起源项。 \vec{J} 可由费克（Fick）第一定律得：

$$\vec{J} = -D\nabla C \quad (\text{其中 } D \text{ 是扩散系数}) \quad (2)$$

从而得到封闭的浓度控制方程：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot D\nabla C + G \quad (3)$$

D 值恒定时，上式可化为：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C + G \quad (4)$$

在热量扩散过程中，场变量是 $T(x, y, z)$ ，通量 \vec{q} 的单位是每单位面积和单位时间的热能。这样就需要把能量单位换成温度单位。在恒压条件下：

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{q} \quad (5)$$

式中， \dot{q} 仍可以通过下面的方程来求解，其中的 k 是热导率：

$$\vec{q} = -k\nabla T \quad (6)$$

为方便起见，假定 k 为常数，可定义热扩散系数 $\alpha = k / \rho c_p$ ，从而得到封闭的与温度 T 有关的偏随体导数：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (7)$$

1.2 速度矢量场与动量扩散张量

流体流动与上述溶质扩散和热量扩散不同，因为场变量是矢量场 $\vec{u}(x, y, z)$ ，即流体速度。但是我们可以像质量及热量传递那样对每一扩散组分写出守恒方程及推导方程。描述每一组分在各个方向动量传递的动量通量是一个二阶张量 τ ，例如 τ_{yx} 是 x 方向的动量在 y 方向的传递。

由于热量扩散的存在，守恒方程比较复杂，但是动量密度 $\rho \vec{u}$ 却可以很容易地写出，所以 x 方向的守恒方程分量为

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} \underset{\text{剪切}}{=} -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (8)$$

公式 (8) 并不完整，仅仅描述了剪应力对 x 方向动量累积的贡献。

1.3 动量扩散与机械应力的关系

对剪应力来说，这个“动量通量”，根据牛顿定律可以被认为是应力：

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (9)$$

因此动量累积速率等同于力，每单位面积的动量累积就是力或剪应力的累积。和机械应力一样剪应力也是对称张量： $\tau_{yx} = \tau_{xz}$ 。但动量通量/剪应力张量 τ 与机械应力 σ 之间有两点根本的区别：

1. 机械应力与动量扩散的符号规定是相反的：

$$\sigma_{xy} = -\tau_{xy} \quad (10)$$

在远古时代，力学工程师与化学工程师都分别蜗居在不同的山洞中，只有看到浓烟信号他们才会走到一起，所以当他们遇到相同的问题时各自的说法不同，因此公式没有统一的表达。但作为材料工程师，我们却必须将二者统一起来。力学工程师将张力表达为正，压力表达为负，并规定箱子上方x方向大于下方的力称为正应力，即 $\sigma_{yx} > 0$ 。化学工程师认为作用于底部的力大于顶部的力，从而引起x-动量沿着y轴正方向扩散，即 $\tau_{yx} > 0$ ，这意味着x方向的剪应力 $\tau_{xx} > 0$ 时物体处于压缩状态。如图1所示：

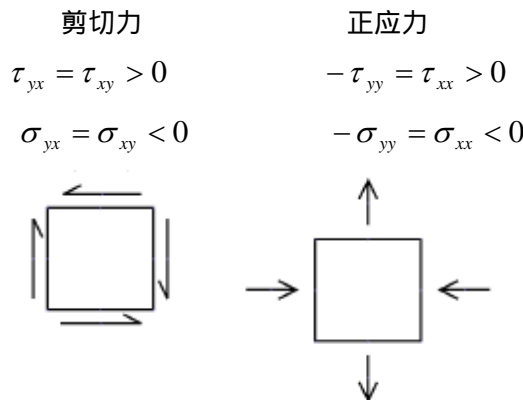


图1 应力状态的符号规定

由于 τ 是剪应力，又没有偏应力，因此对角线之和为零：

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0 \quad (11)$$

因此，剪应力 τ 的自由度比机械应力 σ 的小 1（三维中 5 对 6，二维中 2 对 3）。由于自

由度小，必须用 P 来补充 τ ：

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (12)$$

在流体系统中，压力是一个附加的标量。

因此，流体剪应力与机械应力的关系为：

$$\sigma_{ij} = -\tau_{ij} - pI \quad (13)$$

其中 I 是单位矩阵。

1.4 斯托克斯流动

压力对动量产生影响是因为压力提供了一个沿着压力梯度方向的推动力。在式 8 中引入压力可以得到 x 方向上动量守恒的完整公式：

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (14)$$

三个方向的分量合起来可以用一个矢量公式来表示：

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (15)$$

式中， \vec{F} 代表体积力，如重力，洛伦兹力等。上式就是斯托克斯流动的流动方程，在低速高粘度条件下适用。

公式 15 并不完整，矢量方程中只涉及到矢量 \vec{u} 、张量 $\vec{\tau}$ 以及标量 p 和 ρ ，而在三维空间中公式 15 有 3 个方程和 10 个未知数。如果我们把推导方程中的 τ 表示成速度和密度的函数，再加上连续性方程，就可以消去 5 个未知数。

1.4.1 τ 的基本方程

可以通过类比溶质扩散和热量扩散的式子 2 和 6 求得 τ 。对于牛顿型流体，剪应力与速度梯度成线性关系，其斜率为粘度系数 η ：

$$\tau_{yx} = -\eta \dot{\gamma}_{yx} = -\eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (16)$$

式中， $\dot{\gamma}$ 是剪切形变的速度张量。机械力学研究应力与形变的关系；而由于规定流体没有场应力，流体动力学研究应力与形变速率的关系。这就是为什么弹性方程表现出波的性质而流体方程表现出扩散的性质。在括号里的两个偏微分是为了保持剪应力与形变的对称。动量扩散通量与负的速度梯度成正比；溶质扩散通量与负的浓度梯度成正比，热量通量与负的温度梯度成正比。对角线应力还有一项，在这里我们就不讨论了，但会出现在推导方程的矢量式中：

$$\vec{\tau} = -\eta (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} I) \quad (17)$$

式中，T 是第二个速度梯度外积转置的标记。转置是为了保持对称。

剪切张力是无量纲数，但剪切张力速率的量纲是 1/时间，所以粘度的量纲是时间 \times 应力。

在国际单位制中,就是 $\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ 。在厘米-克-秒(cgs)中,我们把泊(poise)定义为 $1 \frac{\text{erg} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2}$ 。

水的粘度系数是 0.01poise,或厘泊(centipoise)。许多流体粘度系数都是以厘泊(centipoise)为单位的,在国际单位制中厘泊(centipoise) $= 0.001 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$ 。

1.4.2 密度 ρ 的表达式

密度通常只是压力 P 的函数。例如理想气体状态方程就给出了十分接近真实值的密度表达:

$$\rho = \frac{n}{V} = \frac{p}{RT} \quad (18)$$

在液相或低速气相流动中(低于 3 马赫,压力变化不超过绝压平均值的 10%),偏差非常小,因而密度可以看为是定值。这个条件对于不可压缩流体来说是充分不必要条件,关于这一点将在 2.2.1 中详细阐述。

1.4.3 质量守恒与连续性方程

与密度和剪应力不一样,压力不能简单地表示成其他变量的函数。但是质量守恒定律可以求解封闭的斯托克斯流动系统。质量通量是一个乘积项,等于密度与速度的乘积 $\rho \vec{u}$ (巧合的是,其也是动量密度):由于相界面以及其他一些因素可能导致平衡系统的密度不均匀,因此密度梯度本身并不会引起传递,换句话说就是没有“质量扩散”。从质量守恒方程即连续性方程可以推出质量累积速率等于对流质量通量散度:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}) \quad (19)$$

通常写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (20)$$

如果流体不可压缩,则前两项为零,上式变为:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (21)$$

1.4.4 简化的封闭斯托克斯流动方程

对于 η 与 ρ 恒定的牛顿型流体,可以将式 15 写为:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta [\nabla^2 \vec{u} + \nabla \cdot (\nabla \vec{u}^T)] - \frac{2}{3} \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u} I)] + \vec{F} \quad (22)$$

当流体不可压缩时, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, 所以剪切张力散度的第二、三项为零;将剩余项除以 ρ :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad (23)$$

参数 $\nu = \eta / \rho$ 是动力学粘度系数,也称作动量扩散系数。由于式 22 与扩散方程在形式上很相似,因此动力学粘度系数与热扩散系数 $\alpha = k / \rho c_p$ 相似。以水为例,它的动力学粘度系数

是

$$\frac{0.001\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})}{1000\text{kg}/\text{m}^3} = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}^4$$

式 21 , 23 组成了不可压缩牛顿型流体在粘度恒定时的斯托克斯流动方程。

1.5 溶质扩散、热量扩散和动量扩散小结

表一对溶质扩散，热扩散及动量扩散作了小结（括号中的数字是上面公式的编号）。

表 1 溶质，热量及动量扩散的比较

方程	溶质扩散	热量扩散	动量扩散
守恒方程	$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} + G$	$\frac{\partial H}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{q}$ (5)	$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F}$
推导方程	(1)	$\vec{q} = -k\nabla T$ (6)	(15)
扩散系数	$\vec{J} = -D\nabla C$ (2)	$\alpha = k/\rho c_p$	$\tau = -\eta(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{u}I)$
扩散方程	$D=D$	$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 + \frac{\dot{q}}{\rho c_p}$ (7)	(17)
	$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C + G$		$\nu = \eta/\rho$
	(4)		$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho}$
			(23)

1.6 例题

1.6.1 库爱特流动

库爱特（Couette）流动是两平行板间流动的简化，即一板运动，一板静止。例如，在两个大的水平板间有一层 1mm 厚的水。上板以 1cm/s 的速度运动。我们讨论两种情况：(1) 系统最终达到的稳态；(2) 从静止到稳态过程中的瞬态。

稳态 稳态时速度的时间导数为零。只要在流动方向上没有体积力或压力差，稳态时式 23 变为

$$\nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (24)$$

如果流体只沿着上板移动的方向流动，即 x 方向流动，且速度只在垂直平板的方向（y 方向）变化，则上式可化简为随体导数：

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0 \quad (25)$$

通解为：

$$u_x = Ay + B \quad (26)$$

上式是一维稳态动量扩散的表达式，与稳态溶质扩散及热扩散的表达式相似。
扩散研究的对象一般是通量，而在这里是剪应力（使流体流动每单位面积上需要的力）。剪应力的表达式为：

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = -10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2} \frac{0.01m/s}{0.001m} = -0.01 \frac{N}{m^2} \quad (27)$$

因为 x 方向的动量沿着 y 轴的负方向扩散，因此剪应力为负。必须对上板施加一个 x 方向的力，对下板施加一个 x 逆方向的力，来维持这个流动场。

瞬态 现在讨论一下流体刚开始流动时的性质。在 t=0 时刻，平板与流体均为静态，这时上板开始以 1cm/s 的速度在 x 方向上运动。假设在 x 方向上没有压力梯度或体积力，式 23 可变为

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \quad (28)$$

这是基本的扩散方程。当初始条件为速度恒定，且边界条件是 y=1mm，在短的时间间隔内，上式的解为：

$$u_x = 1 \frac{cm}{s} \times \operatorname{erfc}\left(\frac{1mm - y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \quad (29)$$

在 y=0 处速度接近于零时上式成立。已知 $\operatorname{erfc}(2)=0.005$ ，我们可以将 $\operatorname{erfc}(2)$ 作为判断的标准：

$$\text{令 } \frac{1mm - y}{2\sqrt{\nu t}} = 2 \quad (y=0 \text{ 时}) \quad (30)$$

从上式求 t 得

$$t = \frac{(1mm)^2}{16\nu} \quad (31)$$

到目前为止，误差函数方法还是有效的。

这个时间间隔与溶质扩散时间间隔一样，是长度的平方除以动量扩散系数。事实上，对于溶质或热量扩散，我们可以用“较长时间”表达式：

$$t \sim \frac{L^2}{\nu} \quad (32)$$

来近似等于上面稳态解成立的时间，在这里是 $(0.001m)^2 / (10^{-6} m^2/s) = 1 \text{ 秒}$ 。

在 t=0 时刻，初始条件与边界条件的单一性导致了剪应力的单一性。在 t=0 时刻， erfc 函数在 y=1mm 处的导数是无穷大的，从而需要一个无穷大的剪应力来使速度从 0 阶跃到 1cm/s。剪应力可以表示为 $1/\sqrt{t}$ ，所以时间积分和每单位面积的脉冲是有限的。只要电动机能够提供一个相对于稳态很大的动力，边界条件就会被近似满足，从而 erfc 的解基本正确。

1.6.2 由于重力作用沿着倾斜面的流动

（这部分参见 D.R.Poirier 与 G.H.Geiger 合编的“Transport Phenomena in Materials Processing”的第二章）

1.6.3 绕过球体的流动

一个半径为 R 的实心球以相对于流体的速度 V_∞ 在流体中运动。若以球体为参照系，则球是静止的，而离球体较远的流体则以相同的速度运动，靠近球体的流速却比较小，甚至在球体表面的速度为零。

在球坐标中， r 是距球心的距离， θ 是流动场对称轴的纬度角（因此静止时 $\theta = \pi$ ）， ϕ 是圆心角。在球坐标中，稳态流速与压力是

$$u_r = V_\infty \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \cos \theta \quad (33)$$

$$u_\theta = -V_\infty \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \sin \theta \quad (34)$$

$$p = p_0 - \rho g h - \frac{3}{2} \eta \frac{V_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (35)$$

式中， h 是重力的反方向

以上各式可以用来计算流体对球体施加的曳力，以及球体对流体的曳力。总应力的法向量是牵引力 \vec{t} 。

$$\vec{t} = \tau \cdot \hat{n} + p\hat{n} \quad (36)$$

这是固体表面对流体在每单位面积上施加的力。对其积分可求出固体对流体所施加的合力。因此，加上负号之后就变为对固体的曳力。

$$\vec{F} = - \int_{\text{球面}} (\tau \cdot \hat{n} + p\hat{n}) dA \quad (37)$$

当 $\tau_{r\phi} = 0$ 且 $\partial r / \partial \phi = 0$ 时，积分得

$$\vec{F}_d = - \int_{\theta=0}^{\pi} (\tau_{rr}\hat{r} + \tau_{r\theta}\hat{\theta} + p\hat{r}) dA = 6\pi\eta R V_\infty \hat{z} \quad (38)$$

式中 \hat{z} 是 $\theta = 0$ 的方向，即流动方向。

1.7 练习

- 1 证明 1.6.3 节中绕球体做斯托克斯流动的流体速度场及压力场（即式 33 到 35）也满足在球体坐标系中的斯托克斯方程。
2. 证明 1.6.3 节在球体表面，即 $r=R$ 处，由速度场给出的剪应力与压力积分后可得到式 38
3. 式 37 中给出的绕球体流动的总曳力等于浮力（液固密度差乘以球体体积），从而解出在斯托克斯流动中上浮或者下沉的球形颗粒的最终速度。

2 随体导数及奈维-斯托克斯方程

对流传递包括由于物体相对于参照系的运动而引起的溶质、热量、质量及动量传递。在流体系统中，对流传递相对于只有扩散来说增强了传递速率。人们一般不用对流来描述固体的传

递。但是在很多情况下，定义一个相对于固体的动态参照系却很方便，而且在此参照系中，分析方法同前。

这节首先将会介绍固体中的对流传递与随体导数，然后讨论在流体中的应用。这将会引出质量和动量守恒方程中的对流项以及流体性质的 N-S 方程。雷诺数描述了流动方程中对流项及扩散项的相对重要性。如果雷诺数很小，我们就可以忽略对流项而使用 1.4 节的斯托克斯方程。若雷诺数很大则非线性对流项就会使流体不稳定而引起湍流。以上这些内容都将在本节中讨论到。

2.1 随体导数

在一个相对于我们的参照系静止的物质中，扩散方程与式 1 到式 4 相似。等号左侧对时间的偏微分导数描述了空间固定一点的浓度随时间的变化。现在讨论二维的情况(三维时很复杂)，偏微分的定义为：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(x, y, t + \Delta t) - C(x, y, t)}{\Delta t} \quad (39)$$

如果研究的点相对于我们的参照系是运动的，则我们不用偏微分而只需求出新的状态与初始状态的差别。因此，定义随体导数：

$$\frac{DC}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - C(x, y, t)}{\Delta t} \quad (40)$$

忽略高于一阶的项得：

$$\frac{C(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - C(x, y, t)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta C}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta C}{\Delta t} \quad (41)$$

颗粒的运动速度为：

$$u_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, u_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (42)$$

因此，当式 41 中的 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 可得：

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C \quad (43)$$

这个随体导数将会替代传递方程中对时间的偏导数。

可以从另一个角度，用溶质的对流通量来讨论这个问题。单位面积单位时间内传递的溶质的量是速度与浓度的乘积 $\vec{u}C$ 。因此由对流通量引起的累积速率是这个通量散度的相反数， $-\nabla \cdot (\vec{u}C)$ 。将它与 4 式联立得

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}C) + D\nabla^2 C + G \quad (44)$$

将对流项移到方程的左边展开得

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C + C\nabla \cdot \vec{u} = D\nabla^2 C + G \quad (45)$$

左侧的前两项是随体导数。假设流体不可压缩，则第三项为零。式 45 化为

$$\frac{DC}{Dt} = D\nabla^2 C + G \quad (46)$$

2.1.1 例题：热传导、对流及熔化

有一个固体直杆，初始温度为 T_0 ，一端加热后开始熔化。假设加热均匀，则熔化界面是平面且垂直于柱体的对称轴（也许它正在旋转，或者像一个蜡烛或熔化的电极一样直），这就涉及到动态界面问题，因为熔化界面这个边界条件随时间变化。

如果我们把熔化的界面作为参照系，则问题将会大大简化。在这个参照系中，边界固定，但是固体向界面的运动速度不变。很难明确说明对流传热通量的绝对意义，但如果我们关心的只是对流通量差，而不是其绝对大小，则在恒压下，我们可以用 $\vec{u}\rho_p T$ 来表示。

现在讨论一小段厚度为 Δx 的柱体。薄层左侧坐标为 x ，右侧 $x + \Delta x$ ，而且 x 轴与柱轴平行。假设只有轴向的热传递，且温度只是 x 的函数。令进入薄片的热量与出去的热量相等得

$$A\Delta x \cdot \rho_p \frac{\partial T}{\partial t} = [A(u_x \rho_p T + q_x)]_x - [A(u_x \rho_p T + q_x)]_{x+\Delta x} \quad (47)$$

化简得

$$\rho_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_p u_x \frac{T_x - T_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{q_x - q_{x+\Delta x}}{\Delta x} \quad (48)$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，得

$$\rho_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} = \rho_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (49)$$

在等号左面的仍是随体导数。若热导率恒定，则式 7 可变为

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (50)$$

加上热源后的矢量式：

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho_p} \quad (51)$$

在熔化过程中，热量沿着直杆径向传递，使其温度高于熔融界面；同时，直杆相对于界面的运动又使热量向熔融界面传递来使其温度降低，一段时间之后，达到稳定平面，从而温度只是 x 的函数。同时， $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 所以式 50 可写为

$$u_x \frac{dT}{dx} = \alpha \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (52)$$

通解为：

$$T = A + B \exp\left(\frac{u_x x}{\alpha}\right) \quad (53)$$

研究发现，这个系统存在稳态解，并且对流热通量与传导热通量的竞争导致一个 α/u_x 数量级的固定渗入深度。设在界面 $x=0$ 处，熔点 $T = T_m$ ，有一根长度远大于 α/u_x 的杆，令 $A = T_0, B = T_m - t_0$ ，从而使我们的第一个混合对流/扩散方程的解完整。

2.2 流体流动方程中的对流项

通过随体导数的概念我们可以更好地理解连续性方程（式 20），并且可以在运动方程 15、23 中增加新的项。

2.2.1 连续性方程

根据随体导数的定义，连续性方程可以写为

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (54)$$

从上式可以看出不可压缩的条件与密度的 0 次幂随体导数相对应。相对于密度恒定的假设，其条件放宽了。因为密度不需要各处一致，仅需要其在以流动流体颗粒为参照系的体系中不变即可。

例如在油水混合物中，油相与水相的密度不同，但密度恒定。搅拌时，油、水相的本身浓度并不变，所以若要研究在油相或水相中的流体颗粒时，该流体颗粒的密度并不变。因此，此流体可以认为是不可压缩的。连续性方程可以简化为式 21 的形式。

2.2.2 动量对流

与动量的其他性质一样，其对流也更加复杂。我们知道对流溶质通量是 $\vec{u}C$ 对流热通量可以写为 $\vec{u}\rho c_p T$ （只要我们的温度 ΔT 足够小，则 c_p 恒定，从而可以计算对流热量差）

对流质量通量为 $\rho \vec{u}$ 。同理，动量的对流通量也是动量与速度的外积 $\rho \vec{u} \vec{u}$ ，与动量扩散通量一样也是二阶张量。忽略应力、压力、和体积力，可以得到动量累积速率

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{u} \vec{u}) \quad (55)$$

这个很难理解，更不用说可视化了。但在这里可以先通过一个简单的例子来解释。这个问题将会在以后的章节中通过例子来详细说明。

假设一个流动场，在 $t=0$ 时刻

$$u_x = 1 \quad (56)$$

$$u_y = x \quad (57)$$

x 方向的恒定的速度将会使流体沿着 x 轴正方向运动，因此一会儿之后，例如 $t=1$ 时，被移动的 y 速为

$$u_y = x - 1 \quad (58)$$

任意时刻：

$$u_y = x - t \quad (59)$$

这是因为：

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} = -\rho \vec{u} \cdot \nabla u_y - \rho u_y \nabla \cdot \vec{u} + u_y \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad (60)$$

如果流体不可压缩，则：

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} = -\rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (61)$$

上式中右侧是 $-\rho(1 \times 1 + 0)$ ，所以 $\partial u_y / \partial t = -1$ ，从而得到式 59。

2.2.3 奈维——斯托克斯方程

由对流引起的累积速率是散度的相反数。最简单的一种情况就是 1.4.3 节中的连续性方程。对于动量，由动量通量散度的相反数给出由于对流传递而引起的增量的表达式，因此我们可以将 $-\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u})$ 加到 1.4 节式 15 的右侧。

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) - \nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (62)$$

将对流项移到左侧展开得：

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \vec{u} \nabla \cdot \vec{u} = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (63)$$

进一步化简得：

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \vec{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} \right) = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (64)$$

左侧第一组括号内是速度对时间的导数；第二组括号内是式 20 左侧的表达式，因此为零。上式化简得：

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (65)$$

这就是流体中完整的动量守恒方程的一般形式。上式与式 20（或如果你愿意，式 54 也可）组成了奈维 - 斯托克斯方程。在不可压缩粘度恒定的牛顿型流体中，式 65 化为：

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad (66)$$

随体导数中的对流速度项 $\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ 也称为惯性项。对流速度项是非线性项，因此求解非常困难。对流还会引起湍流。

这些方程的推导是这一系列课程的经典部分，接下来将会给出一些例题来帮助理解这些方程之间以及他们所描述的物理现象之间的关系，特别是对流动量传递。最后将对流传热方程加入到流体流动方程中。

2.2.4 例题：圆管中的流动

这节的内容与“流体动力学题解”中的圆管中的流动一样。

2.3 雷诺数

雷诺数 Re 的本质就是惯性项与对流项比值的一个估算。一般地，当流体的特性速度为 U ，特性长度为 L ，恒定运动粘度为 ν 时：

$$\frac{\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}}{\nu \nabla^2 \vec{u}} \sim \frac{U \cdot \frac{U}{L}}{\nu \frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{\nu} \equiv Re \quad (67)$$

当 $Re < 0.1$ 时，我们可以完全忽略惯性项，而用斯托克斯流动方程来精确求解压力与速度场。

1.6.3 节的分析在 $Re < 0.1$ 时成立。

2.3.1 例题：绕球体流动

在 $Re < 0.1$ 的斯托克斯流动中，流体对固体球体施加的曳力是 $\vec{F} = 6\pi\eta R V_\infty \hat{z}$ （式 37， \hat{z} 是流动方向），与粘度、长度及相对速度成正比。

当雷诺数很大时，对流项占主导地位。特别是停滞点的 $\rho \mathbf{u}_r \partial \mathbf{u}_r / \partial r$ 可以帮助我们定义动压头，从而可以估计流体上游与下游的压差：

$$P_{\text{动压}} \equiv \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (68)$$

U 是特性速度， V_∞ 是远离球体的速度，上式和动能相似，代表了动能密度，而且用“惯性项”描述了对流动量项。

这将会引出 3.3 节中的曳力系数（也称为摩擦系数）。

2.4 湍流的原因

雷诺数也可以帮助预测湍流的发生。湍流是由于剪切而引起的流动不稳定。在垂直于流动的方向上加一个扰动就会产生漩涡，而这些漩涡都具有流体的部分能量。当扰动很小时，漩涡很小，在漩涡中产生小漩涡，渐渐地直到粘性耗光它的能量。

扰动和漩涡的增加是由于流体惯性造成的，会被粘性阻力所抑制。惯性项与粘性项的比值就是雷诺数。对于管中完全发展的流体，如果雷诺数小于 2100（认为 U 是平均速度，等于最大速度的一半， L 为直径）就是层流；如果雷诺数大于 2100，流动过程中就会产生剧烈扰动，但不一定会出现湍流。如果进口段条件控制得当，并且把由于外部波动而产生的压力控制在最小范围内，则即使雷诺数很大也可能仍然为层流。实验证明即使 Re 达到 100000，还可以是层流。对湍流的进一步阐述不在本课讨论的范围内。但若要深入地了解湍流，我强烈推荐 Barker library 录像部的关于“湍流（Turbulence）”的半个小时的录像；；索取号为#QC151.78。

2.5 练习

1. 扭转粘度计

扭转粘度计是由几部分组成的：一个装有树脂内半径为 R_2 的长圆筒，一个半径为 R_1 的插入盛器很深但离底部很远的直圆杆，杆儿底部的剪切力可忽略。杆儿连在电动机上，由电动机

带动它匀速转动。长圆筒连在一个转矩尺上。这个仪器可以测多个转速级的粘度。

假设树脂是牛顿型流体，且密度、粘度恒定，在粘度计中的流动为层流。只考虑杆儿与远离底部的圆筒的速度。

- 画出仪器的简图并写出相关的 N-S 方程
- 列出可以简化这个复杂方程的假设条件，适当地消除上式中的某些项。写出简化之后的式子。
- 写出简化方程的速度与压力的通解(不需要解出压力与 r 和 z 的关系,只需证明与 θ 无关,从而得到速度 θ 分量的解)。
- 运用杆儿与圆筒的边界条件计算粘度计中 R_1, R_2 函数的速度分布以及 $r=R_2$ 处的转矩,并求出杆儿的转动速度。转矩是 r 转矩的函数吗?
- 假设圆筒长 20cm, 直径 8cm, 杆儿的直径为 2cm。转动速度恒定为 120rpm 时, 转矩是 $2.0 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ 。 融化聚合物的粘度是多少?
- 当转速是 300rpm, 转矩是上面的二倍大时, 可以说这是牛顿型流体吗? 如果不是, 那它是假塑型还是胀流型?

2 简化 N-S 方程 (24 式)

利用配套的“流体动力学题解”, 写出以下流动的假设条件。

然后根据你的假设, 消除你认为在 N-S 方程中是零的项

- 图 2 是水绕水平圆柱层流的示意图。远离柱体的速度 \vec{V}_∞ 垂直于柱体的轴向。

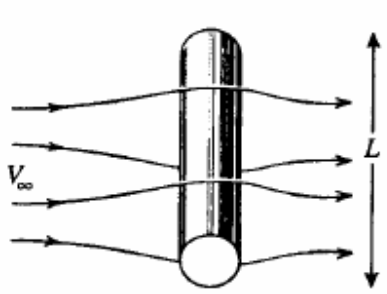


图 2. 绕柱体流动的图示

- 流体流过喷枪或在远离喷枪的地方流动。超音速 (>1 马赫) 牛顿型血浆喷枪可以熔化氧化锆颗粒, 并把熔化的球形液滴喷射到垂直于喷枪的平面底物上。(这是一种制备氧化锆热障层的方法。) 可以忽略血浆所受的重力的影响, 假设喷枪中的流动是径向对称的羽状流。

3 层流边界层与曳力系数

在许多流体流动中, 固体物质仅在靠近固体的一定区域内影响流体。例如, 在绕球体的斯托克斯流动中 (1.6.3 节所述), 球体对整个流体速度的影响随着 R/r 的增大而降低。雷诺数很大时, 在定域内受影响的流体在固体表面形成的薄层即称为边界层。由于边界层偏离而产生的牵引力引起曳力, 所以理解边界层的形成对于曳力很关键。

同样, 在热量或质量传递中, 流体的浓度或温度通常是均一的。仅仅在靠近固体表面吸附

或脱附溶质或热量处可能不均匀。因此边界层对质量热量传递以及电力非常重要。溶质边界层，热量边界层以及动量边界层都具有不同的结构与大小，下面将介绍各边界层。

3.1 节将会用一个简单的运动固体的例子来介绍边界层。

3.1 简单例题：运动固体的热“边界层”

假设不断地从一个温度为 T_0 的馅饼中挤出一层厚的固体聚合物，然后由风扇将其冷却到室温 T_1 ，计算整个薄层的温度分布及长度方向的温度分布。大的传递系数将会使毕渥常数 HL/k 大于 100 (H 是传热系数， L 是薄层厚度， k 是聚合物的热导率)，从而可以把温度看作近似恒定。

把 x 作为沿着运动方向远离馅饼出口的距离， y 为距薄层底部的垂直距离，从而可以写出在 x 方向上存在对流时的稳态传热方程：

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (69)$$

式中，比值 $u_x x / \alpha$ 很大时将会在薄层的顶部和底部形成边界层，而边界层的温度比 T_0 低很多。边界层厚度 $\delta_T(x)$ 是 x 的函数，当 $x \gg \delta_T$ 时 y 方向的导数将会远大于 x 方向的导数。因此可以在拉普拉斯式中忽略后者：

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (70)$$

将 x/u_x 替换为在馅饼出口处聚合物停留时间 τ ，从而得到一维瞬态扩散方程，利用单一的初始条件及恒定的边界条件得：

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha x / u_x}} \right) \quad (71)$$

根据这个解，我们可以把边界层定义为相对温度偏离初始温度 1% 的区域。热边界层的厚度可以记为 $\delta_T(x)$ 。因为 1.8 的误差函数值是 0.99，所以令 $y = \delta_T$ 的误差函数是 1.8。

$$\frac{\delta_T}{2\sqrt{\alpha x / u_x}} = 1.8 \quad (72)$$

$$\delta_T = 3.6 \sqrt{\frac{\alpha x}{u_x}} = \frac{3.6}{\sqrt{\text{Pe}}} \quad (73)$$

注意比值 δ_T / x 是贝克数的函数

3.2 经典流体例题：沿平板流动

上面的热传递问题与经典的沿平板流动的速度边界层流体动力学问题很相似。在这里，不可压缩的粘度恒定的流体以恒定速度沿着 U_∞ 方向运动，在流体与 U_∞ 平行的方向放一静止木板。 Y 是距木板的垂直距离， x 为在流动方向上距板入口段的距离。最终达到稳态时的边界条件是：

$$y \rightarrow \infty, x < 0 \Rightarrow u_y = 0, u_x = U_\infty \quad (75)$$

$$y = 0, x \geq 0 \Rightarrow u_y = 0, u_x = 0 \quad (76)$$

请看图 3：

插入图片

图 3. 平板上的层流边界层的简图

3.2.1 沿平板流动的动量边界层

N-S 方程给出了动量扩散边界层，在这个边界层厚度为 $\delta_u(x)$ 的区域内，速度偏离 U_∞ 1%。这个边界层与前面的 δ_T 形式相似，但是方程的不同却导致结果有一点不同。和热边界层一样，在边界层内 x 方向的速度为 0（平板速度）。我们可以找到 $x \gg \delta_u$ 的情况，从而可以忽略动量在 x 方向的扩散。

然而，与热边界层不同的是，连续性关系在这里起到很重要的作用。对于二维不可压缩流体：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (77)$$

由于 u_x 随着 x 的增大而减小，因此 u_y 必然随着 y 的增大而增大，并且 y 方向上的速度不可忽略，这导致了远离平板的对流通量的传递，从而使 x 方向上低速流体汇入自由流体中，增加了动量传递中的扩散粘度剪切力。这个结果就是 Blassius 解，由图 4 可知， u_x/U_∞ 是距平板的无量纲距离的函数。

$$\beta \equiv y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (78)$$

在此插入图片

图 4 平板流动非对称 N-S 方程的 Blassius 解

当 $\beta = 5.0$ 时，可得到 Blassius 解为 $u_x/U_\infty = 0.99$ ，这定义了边界层的厚度：

$$\delta_u = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (79)$$

综上所述，这与式 73 给出的热边界层在形式上相似。在这里，我们可以将无量纲边界层厚度 δ_u/x 表示成无量纲数的函数，是 Re 的函数：

$$\frac{\delta_u}{x} = 5.0 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} = \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} \quad (80)$$

上式中，脚标 x 表示局部雷诺数（相对于整个板长的总体或平均雷诺数 $U_\infty L/\nu$ 来讲），这里在分子位置上是 5.0，而不是热扩散边界层的 3.6。因为低速流体经过对流传递之后远离了平板而混入自由去区了。

只要在边界层内的流动是层流,以上分析就成立。当雷诺数小于 10^5 时为层流流动,大于 10^5 时为过渡流,大于 10^7 时为完全湍流区。

湍流边界层与层流边界层相差很大,与式 80 类似的湍流式为:

$$\frac{\delta_u}{x} = \frac{0.37}{\text{Re}_x^{0.2}} \quad (81)$$

这里边界层的厚度不是 x 的平方根的函数,而是 $x^{0.8}$ 的函数,因此近似于线性增加。

3.2.2 边界层与进口段长度

我们可以利用边界层形状本身来求得受约束流体的进口段长度,例如我们可以求出在槽中或圆管中流体的进口段长度。我们可以将槽想象为一对平板,边界层沿着平板发展直到在两板中间汇合,根据汇合点来确定进口段长度。若一个槽的两壁间距为 H ,则在 $x=Le$ 处, $\delta = H/2$, 其中 Le 是进口段长度。将以上两式代入式 79 得:

$$\frac{H}{2} = 5.0 \sqrt{\frac{\nu Le}{U_\infty}} \quad (82)$$

解上式,得:

$$Le = \frac{U_\infty H^2}{100\nu} \quad (83)$$

从另外一个角度来看,可以把 Le/U_∞ 当作流体颗粒到达进口段所需的时间,与其他各种快速扩散长度一样,这个时间与高度的平方成正比与扩散系数成反比。这里的系数 10^{-2} 很有意思:如果这是一个两侧扩散问题,尾流将会出现在 $H^2/64\nu$ (式 31) 时达到 $H/2$ 。

但是由于内部的对流动量传递,完全发展的波形会更早达到。

3.2.3 沿平板的层流流动的曳力系数

曳力是流动方向合力。在这种情况下是在 x 方向上,可以像 1.6.3 节中介绍的那样,通过在整个表面对牵引力积分求得。在此, \hat{y} 是平板的法向量, x 方向的牵引力是

$$t_x = -\tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (84)$$

因为平板上的 $u_y = 0$, 因此第二项偏微分为零。若要计算 $\partial u_x / \partial y$, 要求出 Blassius 解的导数 $d(u_x/U_\infty)/d\beta$ 其中, $\beta = 0$ 时 0.332, 因此, 在 $y=0$ 处的剪切应变速率为:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = U_\infty \frac{d(u_x/U_\infty)}{d\beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0.332 U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (85)$$

牵引力是:

$$t_x = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \eta U_\infty^3}{x}} \quad (86)$$

注意这里在 $x=0$ (即板的进口段) 处的明显单一性。在这里, 上面的假设当然不成立了,

特别是当 $x \gg \delta$ 不成立时，因此这个单一性没有什么物理意义；但是，单一性可以使定积分有精确解。

可以在整个平板表面对其积分求出曳力，积分的下限为 $x=0$ ，上限为 $x=L$ ，板的宽度是 W ，则：

$$F_d = W \int_{x=0}^L 0.332 \sqrt{\frac{\rho \eta U_{\infty}^3}{x}} dx = 0.664 W \sqrt{\rho \eta U_{\infty}^3 L} \quad (87)$$

3.3 曳力系数

如 2.3.1 节所述，动压头是 $\frac{1}{2} \rho U^2$ ，其中 U 是系统的特性速度。动压头与面积的乘积可认为近似等于曳力，雷诺数越大估计越准确。因此，将无量纲的曳力系数 f 定义为真实曳力与近似曳力时间的比例系数：

$$F_d = f \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot A \quad (88)$$

当流体绕球体流动时，由于粘性剪切在曳力中起主要作用，因此雷诺数曳力与粘度、速度以及长度成正比。当雷诺数很大时，对流项在动量传递中起主要作用，所以流体的惯性变得很重要，并且曳力与密度、速度的平方以及面积成正比。雷诺数很小时，流动对几何形状不敏感，例如表面粗糙度等。我们在雷诺数很大时定义曳力系数，这样做的好处将会在下方的圆管流动中体现出来。

3.3.1 平板上的曳力系数

在平板上，有两种曳力系数：1. 将动压头与剪切牵引力联系起来的局部曳力系数 f_x ，

$$t_x = f_x \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (89)$$

式 88 定义的将动压头和平板面积与曳力联系起来的整体或平均系数 f_L ，在这两种情况中， U_{∞} 都是特性速度。

若要求出局部曳力系数，可以将式 86 得到的 t_x 除以动压头：

$$f_x = \frac{t_x}{P_d} = \frac{0.332 \sqrt{\frac{\rho \eta U_{\infty}^3}{x}}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 0.664 \sqrt{\frac{\eta}{\rho U_{\infty} x}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (90)$$

有趣的是，雷诺数出现在了等式的右侧。通常局部或整体曳力系数是雷诺数的函数，而且在许多情况下，还是几何形状以及不可压缩流体马赫（Mach）数的函数。

整体/平均曳力系数是 F_d （从 87 式）与动压头及面积的比值：

$$f_L = \frac{F_d}{P_d \cdot A} = \frac{0.664W\sqrt{\rho\eta U_\infty^3 L}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \cdot L \cdot W} = 1.328\sqrt{\frac{\eta}{\rho U_\infty L}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} \quad (91)$$

即曳力系数与雷诺数有关。

对于湍流边界层，局部曳力作用非常不稳定，除非取时间平均值，否则 f_x 没有意义。但是尽管不同的源项具有不同的表达式， f_L 就容易定义和测量了。在 Bird, Steward 与 Lightfoot 合编的书“Transport phenomena”中，关系是：

$$f_L = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.58}} \quad (92)$$

而 Poirier 和 Geiger (引用前人的结论) 给出的关系是

$$f_L = \frac{0.146}{Re_L^{0.2}} \quad (93)$$

不论哪种关系，由于在湍流漩涡中的对流可以增大由流体传向平板的动量传递效率，因此在湍流区的曳力系数比层流的大。

3.3.2 圆管中的流动

对于在管中由压力推动的完全发展好的层流，速度为：

$$u_z = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2) \quad (94)$$

平均速度：

$$u_{z,av} = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 \quad (95)$$

速度分布可以由速度的平均值写出，与推动力无关：

$$u_z = 2u_{z,av}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (96)$$

这样在 $R=r$ 处的内壁阻力是：

$$t_z = -\tau_{rz} = \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)_{r=R} = \frac{4\eta u_{z,av}}{R} \quad (97)$$

在雷诺数表达式中，特性长度是直径，特性速度是平均速度。因此我们可以用直径 d 来表示 t_z ，并除以动压头后得到曳力系数：

$$c_d = \frac{8\eta u_{z,av}/d}{\frac{1}{2}\rho u_{z,av}^2} = \frac{16\eta}{\rho u_{z,av} d} = \frac{16}{Re} \quad (98)$$

沿着圆管轴向的牵引力恒定，因此总的曳力是牵引力与面积的乘积。平均曳力系数与局部曳力系数相等。

在湍流中，曳力系数与雷诺数及无量纲的粗糙度有关。如图 5 所示，无量纲粗糙度的定义是粗糙度的表观值与半径的比值（这当然也是粗糙度形状的函数，但用这个定义可以给出不同形体粗糙度的正确解）。这体现了用动压头与面积之积 $\frac{1}{2}\rho U^2 A$ 来定义曳力系数的优势，如果不用，比如说用 ηUL ，前者对于给定的粗糙度会给出恒定的曳力系数，而后者就会出现多个结果。

3.3.3 绕球体的流动

这节将会讨论绕球体流动的曳力系数曲线（与图 5 类似）。

3.3.4 绕柱体流动

这节将会涉及到图 2，也会给出类似于图 5 的曲线。

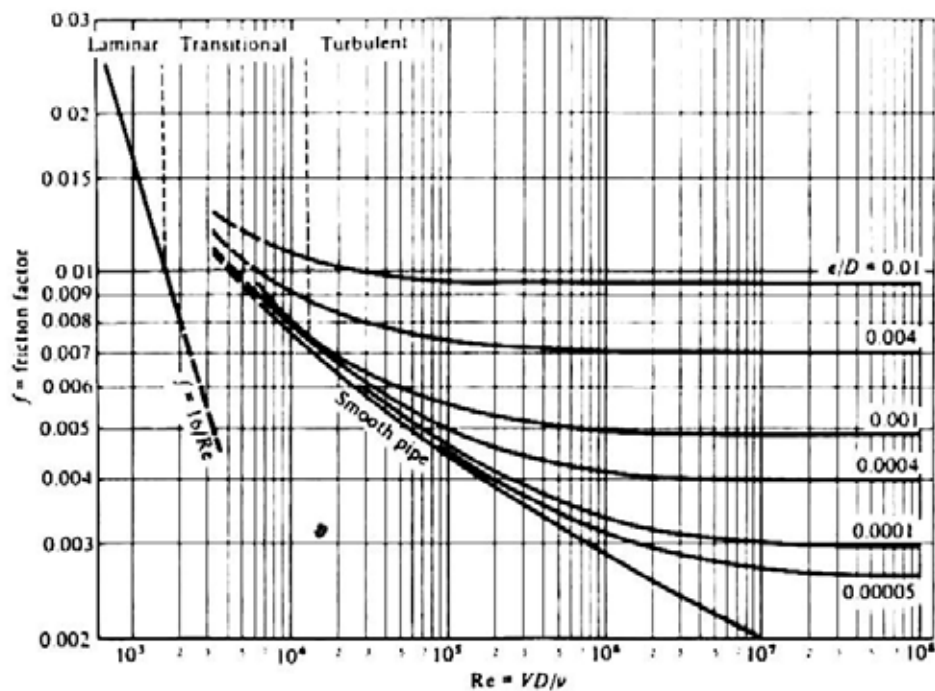


图 5：圆管中的曳力系数，a.k.a 摩擦系数（来自 Poirier 和 Geiger 书的 80 页）

3.4 练习

1. 根据式 38，证明绕球体的底托克斯流动的曳力系数是

$$f = \frac{24}{Re} \quad (99)$$

其中，雷诺数中把球的直径当作特征长度。

2. 平板上的曳力

一个 $1\text{m} \times 1/4\text{m}$ 的木板平放在空中，板的两侧与风平行，两侧（前后沿）垂直于风。参考

资料：空气 $\rho \approx 1.9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu \approx 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$

- 根据所学的平板上的曳力知识，讨论：当板的长边平行于风时还是与风的方向垂直时曳力大？
- 计算 2a 中曳力小的那种情况，当风速为 1cm/sec 时，求板上的总曳力。
- 计算风速为 10m/s 时，相同的板上的曳力。

3. 血管中流体流动

假设设计一种材料来制备人工血管，想要知道这些血管所需要承受的剪切力与压力。假设血管为圆柱形管，并且流体速度恒定，算出直径不同的血管(动脉或毛细血管)所受的剪切力与压力。

先期设计研究只需粗略地估计，因此可以用水的性质来计算。

$$\rho \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu \approx 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

- 用心房的近似体积和脉冲来计算动脉的平均速度。
- 当动脉的直径为 0.7cm 时，根据 a 得到的流速来计算流体在动脉中的平均流速和雷诺数。流动是层流还是湍流？
- 利用上面得到的雷诺数和图 5，计算摩擦系数和在动脉壁的近似剪切牵引力。
- 假设毛细血管长为 1mm，直径为 $50 \mu\text{m}$ 。如果平均流速是 1mm/sec，则血管两端的压力降为多少？
- 至少给出两个原因为什么上面的分析当血液在真实的动脉与毛细血管中流动时不成立？

4. 热量及质量传递系数的估算

热量和质量传递系数是比例系数，可以将固体表面的热量或溶质扩散通量以及固体表面的温度或浓度与远离受控边界层的主体流体的温度以及浓度差联系起来：

$$h \equiv \frac{\vec{q} \cdot \hat{n}}{T_s - T_\infty} \quad (100)$$

$$h_D \equiv \frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{C_s - C_{eq}} \quad (101)$$

式中， C_{eq} 是与大量流体浓度平衡时固体浓度。这些系数描述了溶质或热量通过边界层扩散的能力。

传热系数近似等于流体热导率与边界层厚度的比值：

$$h \sim \frac{k_\eta}{\delta_T} \quad (102)$$

将式 102 代入式 100 得到的式子与式 16 相似。由于固体与流体浓度间的平衡关系，质量传递系数更复杂一些，但我们可以将式 102 乘以一个适当的局部分配系数，从而求得质量传递

系数。

4.1 对流传热与对流传质

对流传热, 对流传质是由于流体流动所引起的。流体流动时会具有局部性质(已在 2.1.1 节、3.1 节中讨论过), 因此才会引起对流。前面已经介绍过用来得到传递方程的溶质与热量对流通量分别是 $\vec{u}C$ 和 $\vec{u}\rho c_p T$, 而正是他们引出了随体导数中的 $\vec{u} \cdot \nabla$, 除此以外, 还有一项 $\nabla \cdot \vec{u}$ 是流体净通量的累积。完整的传热传质一般公式是:

$$\frac{DC}{Dt} + C\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (D\nabla C) + G \quad (103)$$

$$\rho c_p \left(\frac{DT}{Dt} + T\nabla \cdot \vec{u} \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q} \quad (104)$$

和第三节中已讨论过的动量边界层一样, 在流体中大部分溶质浓度与温度通常都是恒定的。只有在靠近固体的一薄层内对流体有影响, 而这一薄层就是浓度或热量边界层。

对溶质和动量通常说只有两种对流传递: 强迫对流, 外力推动流体流过固体; 自然对流, 固体附近流体温度和溶质浓度与流体其余部分不同从而引起密度差, 浮力推动流体运动。两种对流都会被讨论, 但首先给出它们的定义。

4.1.1 相对扩散系数: 普朗特数

普朗特数是动量扩散系数与另一量的扩散系数的比值, 比如溶质或热量。因此对不同的现象我们能得到不同的普朗特数, 甚至在多组分溶液中, 尽管各组分的扩散系数不同, 我们仍能得到多个质量传递普朗特数。对溶质和热量, 普朗特数定义分别为:

$$Pr = \frac{\nu}{D} \quad (105)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (106)$$

传质普朗特数 ν/D 也称为施密特数 (Schmidt number)。

因为普朗特数是性质的比值, 所以它本身也是流体的一个性质。通常在流体中, 由于溶质扩散通常比粘性动量传递慢许多, 传质普朗特数非常大 (远大于 1)。热传递普朗特数不那么大, 特别是对液态金属来讲, 可能远远小于 1。

4.1.2 无量纲传递系数

努塞尔数是传递传质系数与热导率或流体扩散系数的比值, 由长度表示:

$$Nu \equiv \frac{hL}{k_{\text{fl}}} \quad (107)$$

$$Nu \equiv \frac{h_D L}{D_{\text{fl}}} \text{ 或 } \frac{k''L}{D_{\text{fl}}} \quad (108)$$

第二式中的 k'' 是异相反应速率系数而不是质量传递系数。很有趣的是, 通过式 102 可以将努塞尔数写成长度与边界层厚度的比值, 例如在导热中:

$$Nu \sim \frac{(k_{\text{fl}}/\delta_T)L}{k_{\text{fl}}} = \frac{L}{\delta_T} \quad (109)$$

因此大的努塞尔数对应薄的边界层，反之亦然。在质量传递中，由于分配系数的存在，努塞尔数变得较复杂。努塞尔数有时称为舍伍德（Sherwood）数。这个物理意义说明了努塞尔数与先前相似的毕渥数的区别。毕渥数是用热导率或固体扩散系数定义的：

$$Bi \equiv \frac{hL}{k_s} = \frac{L/k_s}{1/h} \quad (110)$$

$$Bi \equiv \frac{h_D L}{D_s} = \frac{L/D_s}{1/h} \quad (111)$$

这里的长度 L 是固体的厚度，毕渥数的物理意义是：通过固体传导或扩散的阻力与在流体中通过边界层的传导与扩散的比值。相关的扩散和对流是在两相中发生的；在努塞尔数中，扩散与对流都是在流体中进行的。传质毕渥数有时也称为 Damkohler 数。

4.2 平板强迫对流

平板强迫对流与 3.1 节 3.2 节相似，因为其中都有热边界层与动量边界层，并且二者的厚度不同。在这儿有两个约束：厚的热边界层与厚的动量边界层分别对应小的和大的普朗特数，并且性质不同。

下面所有的分析均以传热为例，但对传质也可应用。只要记住：如果要用式 100 的传质系数的定义就必须乘以一个分配系数。

4.2.1 低普朗特数：运动固体

如果普朗特数小（小于 0.05），特别是流体是液态金属时热量在流体中扩散的比动量快很多，且边界层会比动量边界层厚，由于这个原因，通常热边界层的运动速度均匀，从而 3.1 节的结论可以近似应用。热量传递应符合式 60，当 $\delta_t \ll x$ 时，化简为式 70，其解为式 71。这样热边界层的厚度近似为式 73 的结果。

假设温度分布不影响流体的粘度；热量方程与动量方程是弱耦合的，即温度分布依赖于速度分布或反之亦然。速度分布由 Blassius 解给出，如 3.2.1 节所述。在此温度下的边界层厚度也已由式 73 和 79 给出，他们的比值是：

$$\frac{\delta_u}{\delta_T} = \frac{3.6 \sqrt{\frac{\alpha x}{U_{\infty}}}}{5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}} = 0.72 \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} = 0.72 \text{Pr}^{0.5} \quad (112)$$

然后我们可以通过计算在壁面（即 $y=0$ ）处法向量 q_y 的值估算传热系数：

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} = -k \frac{\partial}{\partial y} \left[(T_{\infty} - T_s) \text{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha x/u_x}} \right) \right] \quad (113)$$

误差函数在 0 处的导数是 $2/\sqrt{\pi}$ 。根据 $T_s - T_\infty$ (式 100) 定义的 h 允许我们改变符号：

$$q_y = k(T_s - T_\infty) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\alpha x/u_x}} = h(T_s - T_\infty) \quad (114)$$

从而解出 h ：

$$h = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u_x}{\alpha x}} \quad (115)$$

把局部努塞尔数 Nu_x 定义为长度为离板进口段的距离的努塞尔数(如 3.2.1 节中, 式 80 的局部雷诺数), 这样就可以很容易地用另两个无量纲数来表示无量纲传热系数：

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u_x x}{\nu}} \frac{\nu}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (Re_x Pr)^{0.5} \quad (116)$$

这里用 $Re_x Pr$ 来代替 Pe_x 是为了与 4.2.2 节中的表达式一致。当普朗特数不是很小(或居中时)我们可以用下面的 116 式的修正式：

$$Nu_x = \frac{0.564 Re_x^{0.5} Pr^{0.5}}{1 + 0.90 \sqrt{Pr}} \quad (117)$$

上式计算出的 Nu 比 116 式的小一些, 因此传热系数也比式 116 中的小。这是因为 116 式是用恒定的流体速度 U_∞ 得到的, 但事实上在动量边界层内流体的速度并没有那么快, 并且在此区域内对流也较弱。当热边界层比动量边界层薄时, 对应的普朗特数大, 而努塞尔数小。

4.2.2 普朗特数大的情况

当普朗特数很大时, 传热传质行为是由速度方向接近于 y 方向的区域控制的, 比起小普朗特数的情况, 对流较弱, 因此热量/溶质边界层较厚, 传热系数较小。精确分析此问题不在本课程的讨论范围之内, 所以直接给出边界层的相对厚度的表达式及 Nu 数, 而不进行推导：

$$\frac{\delta_u}{\delta_T} = 0.975 Pr^{1/3} \quad (118)$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{0.5} Pr^{0.343} \quad (119)$$

当普朗特数大于 0.6 时, 这些式子很准确。

4.2.3 湍流的影响

湍流流动时, 边界层增长得比层流 $\delta_u \sim x^{0.5}$ 时快得多(3.2.1 和 3.3.1)。扩展到湍流及热量传递, 热边界层也会比层流时厚, 传热系数也会更大。值得注意的是, 湍流中的小漩涡传质传热能力与动量传递一样。因此, 如果我们把湍流粘度 η_t , 热导率 k_t 以及溶质扩散系数 D_T 作为他们在湍流场中的表观值, 我们可以得出湍流普朗特数 ν_t/α_t 或 ν_t/D_t 接近于 1。因此, 在平板湍流中, 速度、热边界层、溶质边界层几乎具有相同的厚度(如 81 式所示)。

4.3 自然对流

自然对流与强迫对流不同主要是因为流体推动力不是一个外加的速度, 而是由于流体中温

度及溶质浓度不同所引起的浮力。通常，固体表面的温度和表面平衡浓度与其周围流体的温度和浓度不同，从而使热量或溶质扩散到流体中，引起固体附近的流体密度与远离固体的流体密度不同。如果这个区域密度大，流体就会下沉；反之，则会上升。

最简单的对流是热量或质量沿着竖直板流入半无限流体中。

4.4 小结：求解过程

上面对强迫对流和自然对流的分析是基于非常简单的平面几何体。但是用上面的公式求解别的形状也不难：如果几何形状相对简单，努塞尔数与雷诺数及普朗特数具有和前面相似的关系。这和曳力系数相似，因为曳力系数对平板，圆管以及球体的雷诺数的函数不同（3.3.1 节、3.3.2 节、3.3.3 节）

在这些情况下，估算局部或整体传热传质系数的过程几近一致。

1. 根据流体的性质计算普朗特数
2. 根据流动特性或温度，求出雷诺数（强迫对流）或格拉晓夫（Grashof）数（自然对流）。
3. 根据普朗特数和雷诺数/格拉斯霍夫数，求出流动区域（ $\delta_u \leq x / \delta_u \gg x$ ，层流/湍流，低/高普朗特数）并写出与该几何形状相对应的区域的努塞尔数的表达式。
4. 用这个表达式求出努塞尔数。
5. 从式 107 或 108 求出 h 或 h_D 的表达式，并计算出他们的值。

到这里就结束了。

4.5 练习

1. 根据式 117 和 119，在普朗特数大和小两种情况下推导总体/平均努塞尔数 Nu , NU 形式与总体/平均曳力系数相似（式 91）。（假设边界层内的流动为层流。）

无量纲数群总结

传热	传质
毕渥数 传导与对流热阻之比 $Bi = hL / k_{\text{固体}}$	传质毕渥数（也称 Damkohler 数） 扩散与对流质量传递阻力之比 $Bi = h_D L / D_{\text{固体}}$
傅立叶数 瞬时时间与达到稳态所用时间的比值 温度曲线的无量纲时间在显有限差分稳定标准中的应用	
努得森数（Knudsen Number） 分子平均自由程与路程之比 表示视线（>1）或连续介质气体模型（<0.01） $Fo = \alpha t / L^2$	
	$Fo = Dt / L^2$

雷诺数： 对流与粘性动量传递之比 $Re = \rho UL / \mu = UL / \nu$	
普朗特数 动量与物质扩散速率之比 $Pr = \nu / \alpha = \mu c_p / k$	传质普朗特数（施密特） 动量与热扩散速率之比 $Pr = \nu / D = \mu / \rho D$
努塞尔数 长度与热边界层厚度之比 用来计算传热系数 h $Bi = hL / k_{\text{流体}}$	传质努塞尔数（舍伍德） 长度与扩散边界层厚度之比 用来计算传质系数 h $Bi = h_D L / \text{流体}$
格拉斯霍夫数 自然对流浮力与粘滞力之比 控制长度与自然对流边界层厚度的比值 $Gr = g\beta\Delta TL^3 / \nu^2$	
$Gr = g\beta_c\Delta TL^3 / \nu^2$	

佩克莱特数 流体中对流与热量扩散/质量传递的比值 $Pe = RePr = UL / \alpha$	
$Pe = RePr = UL / D$	
瑞利数 自然对流与热量扩散/质量传递的比值 过渡为湍流 $Ra = GrPr = g\beta\Delta TL^3 / \nu\alpha$	
$Ra = GrPr = g\beta_c\Delta TL^3 / \nu D$	