可靠度技術手冊

可靠度抽樣檢定技術

彭鴻霖　編著

中華民國八十九年十二月十八日

可靠度抽樣檢定技術

目 錄

可靠度抽樣檢定技術

1 前 言

可靠度試驗根據試驗結果的研判方式分為可靠度決定試驗(reliability determination test)和可靠度符合試驗(reliability conformance test)兩類。前者假設可靠度水準為未知，根據試驗結果決定產品的可靠度水準，必須利用數理統計的推定方法來分析數據，一般又稱為可靠度工程試驗(reliability engineering test)；而後者乃是通過統計假設檢定(hypothesis testing)技術，將試驗結果與規定值比較，判定產品的可靠度是否符合規定的可靠度要求的一種試驗，這種試驗是將選定的樣品放在規定條件下，按規定的功能需求操作一段規定的時間或持續操作，觀察樣品是否發生失效，根據試驗結果在一定的決策風險(risk)下評價產品能力的一種基本方法，一般又稱之為可靠度會計試驗(reliability account test)，可靠度鑑證試驗(reliability demonstration test)。可靠度符合試驗必須抽取一定的樣本進行試驗，將試驗結果利用數理統計中的假設檢定方法判定是否為合格，因此又稱為可靠度抽樣檢定(reliability sampling test)。可靠度抽樣檢定的最大特色是在決策判定時，只是比較試驗所獲的產品可靠度與假設的可靠度水準是否符合，而不在乎可靠度水準的真確程度是多少。

在將試驗數據進行檢定過程之前必須先決定試驗樣本數、允收/拒收準則和一些作業規定，一般稱之為可靠度抽樣計畫或可靠度抽樣方案(reliability sampling plan)。目前已經由 MIL、JIS、CNS 等標準與規範制訂單位建立了各種適用的標準可靠度抽樣方案，並提供相應的圖表，便利查閱使用。這對於產品設計人員、製造人員和試驗人員來說非常方便，只要掌握了抽樣檢定方法，並瞭解查圖表的程序，就可以實際應用了。本章主要介紹可靠度技術中一些制定抽驗檢定方案的基本原理。

2 抽樣計畫基本原理

在傳統的品質管制中，一批產品在出廠前必須進行檢查以保證產品的品質符合規定的要求。產品的試驗可以全數進行試驗，但有些情況，例如產品的批量很大或試驗是破壞性的，要實施全數試驗根本是不可能的，只能抽取一部份的產品進行試驗，根據試驗結果來推斷研判整批的品質水準。抽樣試驗是指從一批產品中隨機抽取部份樣品進行試驗，以這一部份樣品的品質來推測全部產品的品質情況。

可靠度抽樣計畫之構成概念及類別，基本上和品質管制抽樣計畫是基於同樣的理論基礎的，也是根據統計假設檢定之原理而規劃擬訂，根據抽樣計畫確定在假設的決策風險下的允收與拒收準則。在可靠度抽樣計畫中，檢定的對象則為說明產品可靠度的指標，如成功機率、失效機率、存活機率、平均壽命或平均失效間隔時間(θ)、可靠度係數(δ)、失效率(λ)、或不良率(p)等可靠度參數。

2.1 抽樣計畫之形成

為了實施抽樣試驗，首先必須確定選取樣本的群體為何，也就是批(lot)的定義。在一定條件下匯集起來的一定數量的產品稱為產品批，或簡稱批，批中的基本單位稱為

單位產品。對於品質均勻的產品批而言，從批中任意抽取的樣品進行試驗，根據試驗數據所得到的品質推論結果應該服從特定的抽樣分佈，進而可以推斷該批產品的品質水準。因此，比較抽樣結果和假設的品質水質，應用統計假設檢定(hypothesis testing)原理，即可判定在特定風險下產品批品質的好壞。根據此一原理所制定的抽樣試驗判定方法與程序稱為抽樣試驗計畫(sampling test plan)或抽樣檢定方案，簡稱抽樣計畫、抽樣方案或檢定方案。

抽樣計畫依照量測數據的型態分為計數型(attribute)抽樣計畫和計量型(variable)抽樣計畫。以品質管制為例，計數型抽樣計畫是按試驗結果，用不良品數(defectives)、外觀疵病或缺點數(defects)等來判斷整批產品是合格品還是不合格品。計量型抽樣計畫則是以產品的某個定量指標，如尺寸、重量、材料強度、功能等當做標準，來判斷產品是合格品還是不合格品。

在執行抽樣計畫時，依照抽樣試驗結果來判斷產品批是否合格。首先在規定的品質標準與風險下，然後根據所觀測得數據的特性確定抽樣計畫的樣本數量 n 及合格判定數 c，一但決定了這兩個數量，抽樣方案也就決定了。假設試驗結果以 d 表示 n 個樣品中的不合格品數(計數抽樣試驗情況)或失效個數(計量抽樣試驗情況，此時 $d = r$)。當 $d \le c$ 時，認為產品合格，允收該批產品；反之，認為產品不合格，拒收該批產品。

2.2 允收機率與操作特性曲線

抽樣試驗乃是根據抽樣試驗結果來判斷產品批是否為合格，只要在執行試驗之前先確定抽樣數量 n 及合格判定數 c 兩個量，抽樣方案也就定了。因此，有必要瞭解 n 和 c 這兩個數對於抽樣作業的意義。假設從 N 個產品中隨機抽取 n 個樣品，經試驗發現 n 個樣品中的不合格品數為 d 或失效次數為 r，為方便起見，以下討論假設失效次數 r 亦以 d 表示。當 $d \le c$ 時，認為產品合格，允收該批產品；反之，認為產品不合格，拒收該批產品。所以，事件「$d \le c$」是判定批為好批或壞批的重要依據，此一事件的機率 $\Pr\{d \le c\}$ 稱為允收機率，它與品質特性機率分佈的參數 θ (例如不良率 p、失效率 λ 或平均失效時間 θ 等)有關。

若 θ 代表反面的品質或可靠度指標，例如：不良率或失效率，則當 $\theta = 0$ 時，允收機率為 1，即不管那個抽樣方案，總會接收這批產品的。反之，若 θ 代表如平均壽命或平均失效時間之類的正面指標，則當 $\theta = 0$ 時，允收機率應為 0，不可能接收該批產品。若 θ 為任一給定值，則允收機率亦隨之變動，因此在數學上允收機率為品質特性的函數，一般記為 $L(\theta)$：

$$L(\theta) = \Pr\{d \le c | \theta = p\} \tag{1}$$

函數 $L(\theta)$ 又稱為(抽樣計畫的)操作特性(operating characteristic curve, OC)函數。由上式可知，允收機率是條件機率，代表「在產品的品質特性 θ 為 p 時的條件下，根據抽樣試驗結果得到的不合格品數為 d，且 $d \le c$ 時，允收該批產品的機率」。

在以 θ 為橫座標、$L(\theta)$ 為縱座標的平面上，$L(\theta)$ 所對應的曲線稱為操作特性曲線，簡稱 OC 曲線。一般來說，不同的抽樣方案有不同的 OC 曲線。對於不良率或失效率的抽樣試驗來說，允收機率是機率分佈參數的遞減函數，如圖 1 所示；對於平均失

效時間或平均壽命來說，其抽樣方案的允收機率是機率分佈參數的遞增函數，如圖 2 所示。

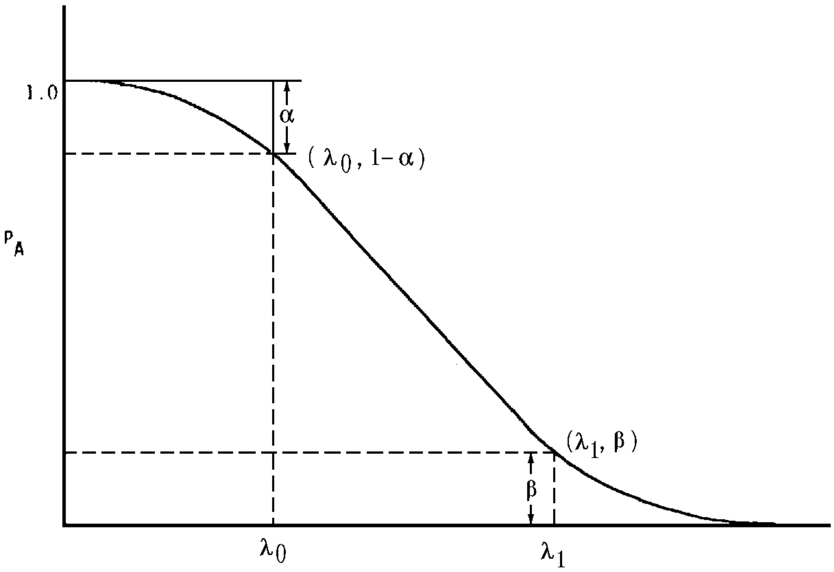

圖 1: 可靠度(失效率)抽樣計畫的 OC 曲線

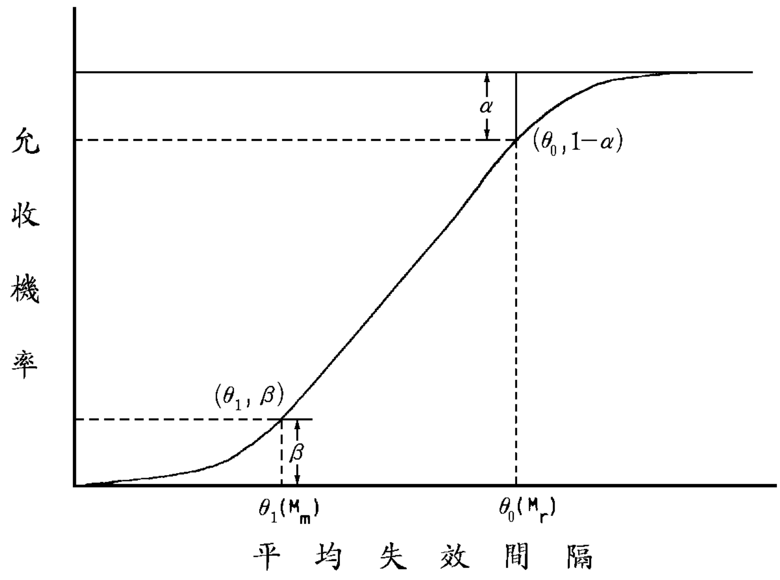

圖 2: 可靠度(平均失效時間)抽樣計畫的 OC 曲線

2.3 抽樣計畫之兩類錯誤及其風險

當產品的批量 N 確定以後，根據什麼原則來確定抽樣檢定方案中的 n 和 c 呢？由於抽樣的隨機性，所以從一部份樣品品質的試驗結果推斷整批產品品質的好壞，一點都不犯錯誤是不可能的，只能要求犯錯誤的機率儘量小些，在抽樣試驗中可能會犯下的錯誤有下述兩類：

(1).第 I 類錯誤

由於抽樣的原因，把本來應該是合格的一批產品誤判為不合格產品批而予以拒收，稱這類錯誤為第 I 類錯誤。犯這類錯誤導致了生產者受到損失，所以犯這類錯誤的機率又稱為生產者風險(producer's risk)，一般用 α 表示，通常取 0.01、0.05、0.10 等，它的意思是採用這種方法進行可靠度抽樣檢定時，生產者要冒 1%、5%、10%等的風險把合格批判為不合格批。

(2).第 II 類錯誤

由於抽樣的原因，把本來不合格的一批產品誤判為合格批產品批而加以允收，稱這類錯誤為第 II 類錯誤。犯這類錯誤導致了使用者受到損失，所以犯這類錯誤的機率又稱為使用者風險(consumer's risk)，一般用 β 表示，通常取 0.05、0.10、0.20 等，它的意思是當採用這種方法進行可靠度抽樣檢定時，使用者要冒 5%、10%、20%等的風險把不合格批誤作為合格批。

理想的抽樣方案是要求生產者風險 α 及使用者風險 β 全為零，但是這種方案是不存在的。如要使 $\alpha = 0$，就是絕對不能把合格批判為不合格批，這要求對任何一批產品都判為合格，但這樣使用者風險 β 就會增大；反之，若要使 $\beta = 0$，就要導致 α 增大。所以 α、β 是對立的，不能同時都很小。實際中常常是生產者與使用者共同協商，確定一個都願意承擔的風險 α 和 β，作為制定抽樣方案的基礎和依據。就理論立場，生產者風險與消費者風險應屬相等，以免偏袒一方，但就固定樣本大小而言，幾乎不可能使兩個風險值完全相等，同時為適應實際情況，有時亦需使一方風險稍大。一般常用的數據多屬下列幾種：

(1). $\alpha = 0.05$， $\beta = 0.10$ ；

(2). $\alpha = \beta = 0.10$ ；

(3). $\alpha = 0.10$， $\beta = 0.20$ ；

(4). $\alpha = \beta = 0.20$。

2.4 檢定水準的制訂

當瞭解抽樣操作特性曲線的特性之後，就可對其進行進一步的分析，以便在實際應用時解決如何選擇適當的抽樣方案的問題，而其中最重要的就是要如何決定檢定水準。由於檢定水準決定產品是否可以允收，因此必須由生產者與使用者雙方在執行抽

樣試驗之前共同商定。以平均壽命θ為例，在擬訂抽樣方案時，站在提供產品的生產者的立場，總是希望產品有較大的機率被允收，因此會選定一個固定的水準θ_0值，當試驗結果$\theta \ge \theta_0$時，認定產品批是合格的，希望該批產品能夠被允收；而當$\theta < \theta_0$時，則承認產品是不合格的，同意退回該批產品。此時所選定的θ_0即代表該批產品的允收可靠度水準(acceptance reliability level, ARL)。

由圖 2 可看出：當$\theta \ge \theta_0$，允收機率$L(\theta) \ge 0.95$，而當$\theta \le \theta_0$時，則$L(\theta) < 0.95$。因此，當$\theta \ge \theta_0$時為合格產品，產品批被誤判為不合格批的機率(生產者風險)為：

$$\alpha = 1 - L(\theta) \le 0.05 \tag{2}$$

但是，當$\theta < \theta_0$時為不合格產品，而產品批被誤判為合格批的機率(使用者風險)為：

$$\beta = L(\theta) \le 0.95 \tag{3}$$

使用者風險可能高達 0.95，由此可見，按這樣的抽樣方案進行檢定雖然能滿足生產者風險，但對使用者的利益則不太照顧，即使將θ_0再降低一點，對使用者的利益也沒有太大改善。若θ_0降得很多，情況恰好相反。因此可以說，若只規定一個θ_0作為合格判定標準，總會導致β太大或α太大，而使一方難以接受。為了使雙方都能滿意，可規定兩個水準值，亦即除了θ_0之外，另外選定一個θ_1且$\theta_0 > \theta_1$，此兩個水準數值確定後，雙方商定：當產品批的$\theta \ge \theta_0$時，以較大機率接收這批產品，即：

$$\theta \ge \theta_0, \quad L(\theta) \ge 1 - \alpha \tag{4}$$

並且要求當$\theta = \theta_0$時,

$$L(\theta_0) = 1 - \alpha \tag{5}$$

當產品批的可靠度水準較差時，亦即$\theta \le \theta_1$，以較小的機率允收這批產品，θ_1為極限可靠度水質(limiting reliability, LR)，亦即

$$\theta \le \theta_1, \quad L(\theta) \le \beta \tag{6}$$

特別要求當$\theta = \theta_1$時,

$$L(\theta_1) = \beta \tag{7}$$

綜上所述，要得到一個抽樣方案，首先由生產者與使用者協商確定四個數α、β、θ_0、θ_1，然後構造一個抽樣方案，使其 OC 曲線通過 A、B 兩點，如圖 2。因此，制訂一個抽樣方案，可以視為在給定α、β、θ_0和θ_1下，求解聯立方程式組的問題：

$$
\begin{aligned}
L(\theta_0) &= 1-\alpha \\
L(\theta_1) &= \beta
\end{aligned}
\tag{8}
$$

滿足上述聯立方程式組的解為抽驗量 n 和合格判定數 c。

由以上討論可知，OC 曲線一般是由五個因子所構成的，以平均失效時間(θ)為例，這五個因子分別為：

θ_0： 為 MTBF 檢定上限，當物品的 MTBF 真值等於或大於此一數值時，有很高的機率($1-\alpha$)判定為合格可以允收，因此又稱為可靠度允收水準(acceptable reliability level, ARL)。

θ_1： 為 MTBF 檢定下限，當物品的 MTBF 真值等於或小於此一數值時，有很高的機率($1-\beta$)判定為不合格必須拒收，因此又稱為可靠度拒收水準。

α： 為生產者冒險值，當物品的 MTBF 真值等於 θ_0 而被判定為拒收的機率，當 MTBF 真值高於 θ_0 時卻被拒收的機率小於 α。

β：為使用者冒險值，當物品的 MTBF 真值等於 θ_1 而被判定為允收的機率，當 MTBF 真值低於 θ_1 時卻被接收的機率小於 β。

d： 為鑑別比，θ_0 與 θ_1 之比值($d=\theta_0/\theta_1$)，$d \geq 1$。顧名思義，d 代表一個抽樣方案的鑑別能力，d 值愈大，表示鑑別能力愈差，但所需試驗時間愈少，反之鑑別能力愈好，但所需試驗時間愈長。

2.5 可靠度抽樣計畫分類

同樣的，可靠度鑑證試驗按照評估可靠度的方法加以分類，假如每一組件的試驗結果只是分類為可接受與不可接受，而允收決策係根據一定樣本數中可接受或不可接受的個數而決定，則這種鑑證試驗結果為計數型隨機變數，每一個樣本的試驗結果為伯努利分佈，整個抽樣過程屬於計數值檢定，可以用二項分佈來描述。

假如試件在試驗時記錄的服勤壽命是以時間為單位，並且假設服勤壽命可以用一特定的機率分佈來描述，例如常態分佈或韋伯分佈，則這種試驗為計量值檢定。不過，即使產品可靠度特性的機率分佈為常態分佈或韋伯分佈，也可將失效時間判定為可接受與不可接受而執行計數值檢定。這種考慮時間因素的抽樣試驗結果屬於計數型隨機變數，可以用波桑分佈來加以描述，亦即抽樣過程為波桑過程(Poisson process)。計數值檢定執行上一般比較簡單而且便宜，但是要達到與計量值檢定一樣的風險，則需要較大的樣本大小。

依照產品特性觀測數據的表示方式、可靠度參數的類別、產品產(批)量等之差異，可靠度抽樣計畫大致可做如下之分類：

(1).計數值數據

a.　**小批量抽樣檢定方案**

b. **大批量抽樣檢定方案**

c. **大批量抽樣檢定方案(波桑近似法)**

d. **使用 MIL-STD-105 計數值抽樣計畫**

e. **逐次二項抽樣檢定方案**

(2).計量值數據

a. **試驗時間截略抽樣檢定方案(定時抽樣檢定)**

(a). **指數分佈**

(b). **常態分佈**

(c). **韋伯分佈**

b. **失效數目截略抽樣檢定方案(定數抽樣檢定)**

(a). **指數分佈**

(b). **常態分佈(σ已知)**

(c). **常態分佈(σ未知)**

(d). **韋伯分佈**

c. **逐次抽樣檢定**

(a). **指數分佈**

(b). **常態分佈**

d. **干擾抽樣檢定**

e. **貝氏逐次抽樣檢定**

3 指數分佈下的失效率和平均壽命抽樣計畫

在可靠度工作中，人們關心的品質指標一般是失效率、平均失效時間或平均壽命、可靠壽命等，對這些指標的檢定需要進行壽命試驗。此處假設產品的壽命分佈是單參數指數分佈，累積分佈函數為：

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1-\exp(-\lambda t) \\ &= 1-\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

式中λ為產品的失效率及其倒數平均失效時間θ，均為產品的可靠度參數。

可靠度抽樣方案的種類根據抽樣決策之時機的次數，可分為單次抽樣、多次抽樣及逐次抽樣。在指數分佈的假設下，物品失效率的抽樣方案可參考 MIL-STD-690，對於可靠度指標為壽命或失效時間的物品，通常假設失效時間為指數分佈，根據這種假設而規劃的抽樣計畫可參考 DOD-H-108，MIL-HDBK-781 等文件。若可靠度變數為二項式分佈，則其抽樣計畫可參考 MIL-STD-105，若可靠度變數為常態分佈，則其抽樣計畫可參考 MIL-STD-414。MIL-HDBK-781 將可靠度抽樣計畫的種類根據抽樣決策之特性與應用時機區分為固定長度單次抽樣檢定、逐次抽樣檢定與全數生產可靠度接收抽樣檢定等三類。以下在定時截尾壽命試驗的前題下，討論失效率的抽樣檢定方法。

3.1 失效率抽樣計畫

從一批產品中任意抽取 n 個樣品進行壽命試驗，到事先規定的截止時間 t 停止試驗，如在$[0,t]$內發生的失效次數為 r，則失效率抽樣檢定判斷準則為：當$r \le c$時，允收該批產品；否則，拒收該批產品。與計數抽樣方案一樣，n 為抽樣數量，c 為合格判定數，此處還要確定一個試驗截止時間 T。

為了制訂一個失效率抽樣方案，除需要給定二類風險α、β外，還要規定品質水準：允收失效率λ_0，記為 AFR(acceptable failure rate)，其含義為當產品批失效率$\lambda \le \lambda_0$時，產品符合要求，應以高機率允收，即要求：

$$L(\lambda_0) = 1-\alpha \tag{10}$$

而

$$L(\lambda) \le L(\lambda_0) = 1-\alpha \tag{11}$$

極限失效率λ_1，記為 LFR(limiting failure rate)，其含義為當產品失效率$\lambda \ge \lambda_1$時，產品不符合要求，應以低機率允收，即要求

$$L(\lambda_1) = \beta \tag{12}$$

而

$$L(\lambda) \le L(\lambda_1) = \beta \tag{13}$$

α、β、λ_0、λ_1通常根據生產者的可能及使用者的需要協商確定，一般取值：α為 0.05，β為 0.10；λ_0可取同類產品較先進的水準，而且估計生產者可以達到的；λ_1可根據產品在使用中的重要性來決定，如產品是整機中的關鍵性高，則λ_0/λ_1可選 1/3~1/2，確有必要時，甚至可取 2/3，一般可取 1/5~1/10。比值λ_0/λ_1過大，將會增加抽樣數量 n 或試驗時間 t。

在規定截尾時間 t 和、β、λ_0、λ_1後，可由方程式組：

$$L(\lambda_0) = 1-\alpha$$
$$L(\lambda_1) = \beta \qquad (14)$$

確定抽樣數量 n 和合格判定數 c，這樣組成的抽驗方案為標準型失效率抽樣方案。

為了保證使用者的要求，同樣可以僅控制使用者風險 β 和極限失效率 λ_1，在滿足條件：

$$L(\lambda_1) = \beta \qquad (15)$$

的前題下，用儘可能少的抽樣數量及試驗時間，並適當地考量生產者風險 α，根據這樣的原則制訂的失效率抽樣方案稱為 LFR 方案。

關於失效率抽樣檢定的 OC 函數的計算，可使用二項分佈或波桑分佈進行。假設一個產品在 $[0,t]$ 內失效的機率為 $\Pr\{T<t\}=F_T(t)$，而在 $[0,t]$ 內不失效的機率為 $R(t)=1-F_T(t)$，因此 n 個產品進行壽命試驗，在 $[0,t]$ 內失效 r 個的機率為：

$$\Pr\{X=r\} = \binom{n}{r}\left[F_T(t)\right]^r\left[R(t)\right]^{n-r} \qquad (16)$$

在指數分佈情況下，允收機率為：

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \Pr\{r \le c\} \\ &= \sum_{r=0}^{c}\binom{n}{r}\left[F_T(t)\right]^r\left[R(t)\right]^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^{c}\binom{n}{r}\left[1-\exp(-\lambda t)\right]^r\left[\exp(-\lambda t)\right]^{n-r} \end{aligned} \qquad (17)$$

當抽驗數量 n 較大，且 $n\lambda t$ 不太大時，二項分佈可用波桑分佈近似，因此有：

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \sum_{r=0}^{c}\frac{(n\lambda t)^r}{r!}\exp(-n\lambda t) \\ &= \int_{2n\lambda t}^{\infty} f\left(\chi^2;2c+2\right)d\chi^2 \end{aligned} \qquad (18)$$

其中 $f\left(\chi^2;2c+2\right)$ 是自由度為 $2c+2$ 的 χ^2 分佈的機率密度函數，式(17)及式(18)為失效率 λ 的函數，其對應的曲線為指數分佈下失效率的操作特性(OC)曲線。在失效率抽樣方案中，值得注意的一點是，試驗截止時間 t 與抽樣計畫的樣本數量 n 可以相互調整，即若使樣本數量 n 小一些，則可增大試驗截止時間 t，反之亦然。

3.2 平均失效時間或平均壽命抽樣檢定

3.2.1 固定長度單次抽樣計畫

固定長度抽樣檢定之優點由其名稱即可看出，由於事先對於試驗時間資訊的瞭解，使得試驗規劃人員可以在試驗時間、生產者風險及使用者風險之間執行擇優研究。依照停止試驗的準則是試驗時間或失效次數，以及執行試驗過程中發生失效時失效件是否進行換修，固定長度抽樣檢定計畫共分為下列四種抽樣檢定方案：

(1). 固定試驗時間

a. 失效後試件不予換修

b. 失效後試件予以換修

(2). 固定失效次數,

a. 失效後試件不予換修

b. 失效後試件予以換修

對於不可修復的產品，考量的可靠度指標往往是平均壽命θ，下面將分別討論定數截尾、定時截尾試驗下平均壽命的抽樣檢定方法。

3.2.2 定數截尾壽命試驗的抽樣方法

從一批產品中任取n個樣品，在事先規定一個截尾的失效次數r下進行壽命試驗，當樣品中出現第r個失效時，試驗停止。假設r個失效樣品的失效時間為$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_r, r \le n$，則試驗失效時不更換失效試件的抽樣方案，其平均壽命的最大概似推定值為：

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r}\left\{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r\right\} \tag{19}$$

而試驗失效時立即更換失效試件的抽樣方案，其平均壽命的最大概似推定值為：

$$\hat{\theta} = \frac{nt_r}{r} \tag{20}$$

平均壽命θ的檢定規則為：

(1). 當$\hat{\theta} \ge \theta_c$時，認為產品合格，允收該批產品；

(2). 當$\hat{\theta} < \theta_c$時，認為產品不合格，拒收該批產品。

其中 n 為抽樣計畫的樣本數量，θ_c 為合格判定標準，即合格平均壽命。

對於固定失效次數截尾壽命試驗的抽樣方案，其允收機率為：

$$L(\theta) = \Pr\left\{\hat{\theta} \geq \theta_c\right\} = \Pr\left\{\frac{2r\hat{\theta}}{\theta} \geq \frac{2r\theta_c}{\theta}\right\} \tag{21}$$

由於 $2r\hat{\theta}/\theta$ 可以用自由度為 $2r$ 的 χ^2 分佈來描述，所以上式可用 χ^2 分佈的分位數表示，即：

$$\chi^2_\gamma(2r) = \frac{2r\theta_c}{\theta} \tag{22}$$

式中 γ 為允收機率，其操作特性(OC)曲線如圖 2 所示。

制訂一個固定失效次數截尾壽命試驗的抽樣方案，除了給出試驗截尾次數 r 和二類風險 α、β 外，還要規定：允收時的平均壽命 θ_0，其含義為：當產品批平均壽命 $\theta \geq \theta_0$ 時，產品符合要求，應以高機率允收，即要求：

$$L(\theta_0) = 1 - \alpha \tag{23}$$

於是當 $\theta \geq \theta_0$ 時，

$$L(\theta) \geq L(\theta_0) = 1 - \alpha \tag{24}$$

極限平均壽命 θ_1，其含義為：當產品批平均壽命 $\theta \leq \theta_1$ 時，產品不符合要求，應以低機率允收，即要求：

$$L(\theta_1) = \beta \tag{25}$$

於是，當 $\theta \leq \theta_1$ 時，

$$L(\theta) \leq L(\theta_1) = \beta$$

標準型固定失效次數截尾壽命試驗的抽樣方案是在給定的 α、β、θ_0、θ_1 下，由下列方程式組確定 n、θ_c、r：

$$\begin{aligned} L(\theta_0) &= \Pr\left\{\hat{\theta} \geq \theta_c; \theta_0\right\} = 1 - \alpha \\ L(\theta_1) &= \Pr\left\{\hat{\theta} \geq \theta_c; \theta_1\right\} = \beta \end{aligned} \tag{26}$$

在解方程式組時，為了使用上的方便，令 $d = \theta_0/\theta_1$，稱為鑑別比。

由式(26)可以看出，定數截尾壽命試驗抽樣方案與抽樣數量 n 無關，這就使得我們可以根據實際情況來選擇 n，假如要求試驗時間短一些，那麼就多抽一些樣品執行試驗；反之，若不可能拿太多的樣品執行式，那麼就要在較長時間內才能有 r 個產品失效。

定數截尾壽命試驗的抽樣方案，由於充份利用了截尾樣本所提供的訊息，因此它的優點是可以減少抽樣數量 n 或試驗時間 t。但其最大缺點是試驗時間無法控制，給生產管理帶來困難，所以在平均壽命的抽樣試驗中，常用的是定時截尾壽命試驗下的抽樣方案。

3.2.3 定時截尾壽命試驗抽樣方案

從一批產品中任取 n 個樣品進行壽命試驗，試驗到事先規定的截止時間 t 停止，如在 $[0,t]$ 內的失效次數共為 r 個，則檢定規則為

(1). $r \le c$，認為產品合格，允收該批產品；

(2). $r > c$，認為產品不合格，拒收該批產品。

在壽命分佈為參數為 λ 的指數分佈的前題下，即：

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1-\exp(-\lambda t) \\ &= 1-\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

式中 $\theta = 1/\lambda$ 為產品的平均壽命。則 n 個產品在 $[0,t]$ 內出現失效或故障的次數 r 服從或近似服從參數為 nt/θ 的波桑分佈，因此固定試驗時間截尾壽命試驗下，平均壽命抽樣方案的允收機率為：

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \Pr\{r \le c;\theta\} = \sum_{r=0}^{c} \frac{(nt/\theta)^r}{r!} \exp\left(-\frac{nt}{\theta}\right) \\ &= \int_{2nt/\theta}^{\infty} f\left(\chi^2;2c+2\right) d\chi^2 \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $f\left(\chi^2;2c+2\right)$ 是自由度為 $2c+2$ 的 χ^2 分佈的機率密度函數，其抽樣操作特性(OC)曲線與圖 2 一樣。

在有更換情況下，設 $nt = T$，T 為總試驗時間，則有：

$$L(\theta) = \sum \frac{(T/\theta)^r}{r!} \exp\left(-\frac{T}{\theta}\right) \tag{29}$$

對於給定的兩類風險α、β及允收平均壽命θ_0、極限平均壽命θ_1，可建立下列方程式組：

$$\begin{aligned} L(\theta_0) &= \Pr\{r \le c; \theta_0\} \\ &= \sum_{r=0}^{c} \frac{(nt/\theta_0)^r}{r!} \exp\left(-\frac{nt}{\theta_0}\right) \\ &= \int_{2nt/\theta_0}^{\infty} f\left(\chi^2; 2c+2\right) d\chi^2 \\ &= 1-\alpha \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} L(\theta_1) &= \Pr\{r \le c; \theta_1\} \\ &= \sum_{r=0}^{c} \frac{(nt/\theta_1)^r}{r!} \exp\left(-\frac{nt}{\theta_1}\right) \\ &= \int_{2nt/\theta_1}^{\infty} f\left(\chi^2; 2c+2\right) d\chi^2 \\ &= \beta \end{aligned} \tag{31}$$

由此可得,

$$\begin{aligned} \frac{2T}{\theta_0} &= \chi^2_{(1-\alpha)}(2c+2) \\ \frac{2T}{\theta_1} &= \chi^2_{\beta}(2c+2) \end{aligned} \tag{32}$$

由上式可解得 T 與 c。根據$T = nt$及實際生產狀況，可確定抽樣數量 n 和試驗截止時間 T。如產品批量少，n 可取得小一些，但 T 相對地將增大。

對於常用的兩類風險α、β及鑑別比 d，已有現成的抽樣方案表，如表 1 所示。

表 1: 定時截尾壽命試驗抽樣方案

抽樣方案	生產方風險 α	消費方風險 β	鑑別比 $d = \theta_0/\theta_1$	試驗時間 T θ_1的倍數	判決準則(失效次數) 允收數	拒收數
1	12.0%	9.9%	1.5	45.0	36	37
2	10.9%	21.4%	1.5	29.9	25	26
3	17.8%	22.1%	1.5	21.1	17	18
4	9.6%	10.6%	2.0	18.8	13	14
5	9.8%	20.9%	2.0	12.4	9	10
6	19.9%	21.0%	2.0	7.8	5	6
7	9.4%	9.9%	3.0	9.3	5	6
8	10.9%	21.3%	3.0	5.4	3	4
9	17.5%	19.7%	3.0	4.3	2	3

[範例 1] 制訂某類裝備的平均壽命試驗抽樣方案，若使用者和生產者雙方協定：

$\alpha = \beta = 10\%$

$\theta_1 = 8{,}000\,\mathrm{hr}$

$d = 2.0$

[解答 1] 由題意可知相對應的允收平均壽命為：

$\theta_0 = d \times \theta_1 = 2.0 \times 8{,}000 = 16{,}000\,\mathrm{hr}$

查表 1 屬於抽樣方案為 4，故總試驗時間為：

$T = 18.8 \times \theta_1 = 18.8 \times 8{,}000 = 150{,}400\,\mathrm{hr}$

允收數(合格判定數)： $c = 13$

由此可知，所建立之抽樣方案為：

當 $r \le 13$ **時，允收該批產品；**

當 $r > 13$ **時，拒收該批產品。**

如取 30 台該型裝備做壽命試驗，可修復相當於有置換，故試驗的截止時間 t_c **為：** $t_c = T/n = 150400/300 = 5{,}013\,\mathrm{hr}$

即取 30 台該型裝備做壽命試驗到 5,013 小時，如失效次數不超過 13 次，則通過驗證試驗，允收該批產品，否則拒收該批產品。

3.3 計量型逐次抽樣檢定

對某些產品需要制訂平均壽命的抽樣方案，下面結合壽命分佈為指數分佈時介紹平均壽命的逐次抽樣試驗。

逐次壽命試驗抽樣方案的檢定規則是：從一批產品中任取 n **個樣品進行壽命試驗，觀察第** r **個失效發生的時間，** $r = 1,2,\ldots,n$**，並計算第** r **個失效發生時，**n **個產品的總試驗時間** T**，判斷準則為：**

(1). $T \ge T_A$，**認為產品符合要求，允收該批產品；**

(2). $T \le T_B$，**認為產品不符合要求，拒收該批產品；**

(3). $T_B < T < T_A$，**不能決定，繼續試驗。**

在不能做決定的情況下，繼續做試驗到第 $r+1$ **個失效發生，然後同樣計算此時** n **個產品的總試驗時間** T'**，將** T' **與** T_A **和** T_B **做比較，決定是否允收或是拒收，或不能決定，繼續試驗。重複上述過程，直到做出允收或拒收為止。**

對於一個逐次壽命試驗抽樣方案，關鍵是要確定兩個界限 T_A 和 T_B 為止，要給定兩類風險 α、β，並規定允收平均壽命 θ_0 和極限平均壽命 θ_1。下面按壽命試驗為有替換和無替換兩種情況討論兩個界限 T_A 和 T_B 的求法。

3.3.1 有替換壽命試驗情況

用一台裝備做壽命試驗，可修復相當於有替換，在確定的時間 T 內恰有 r 次失效或故障發生的機率為：

$$p_r = \Pr(X = r; T, \theta) = \frac{(T/\theta)^r}{r!}\exp\left(-\frac{T}{\theta}\right) \tag{33}$$

當 $\theta = \theta_0$ 時，上述機率為：

$$p'_r = \Pr\{X = r; T, \theta_0\} = \frac{(T/\theta_0)^r}{r!}\exp\left(-\frac{T}{\theta_0}\right) \tag{34}$$

當 $\theta = \theta_1$ 時，上述機率為：

$$p''_r = \Pr\{X = r; T, \theta_1\} = \frac{(T/\theta_1)^r}{r!}\exp\left(-\frac{T}{\theta_1}\right) \tag{35}$$

計算機率比值：

$$\begin{aligned}\frac{p''_r}{p'_r} &= \frac{\dfrac{(T/\theta_1)^r}{r!}\exp\left(-\dfrac{T}{\theta_1}\right)}{\dfrac{(T/\theta_0)^r}{r!}\exp\left(-\dfrac{T}{\theta_0}\right)} \\ &= \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp\left[-T\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right]\end{aligned} \tag{36}$$

用機率比和兩個常數 A、B 做比較，

(1). $A = \dfrac{\beta}{1-\alpha} < 1$

(2). $B = \dfrac{1-\beta}{\alpha} > 1$

其檢定規則為：

(1) 當 $\frac{p_r''}{p_r'} \le A$ 時，認為產品符合要求，允收該批產品；

(2). 當 $\frac{p_r''}{p_r'} \ge B$ 時，認為產品不符合要求，拒收該批產品；

(3). 當 $A < \frac{p_r''}{p_r'} < B$，不能決定，繼續試驗。

由此檢定規則知，繼續試驗的條件是：

$$A < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp\left[-T\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right] < B \tag{37}$$

兩邊取對數後，整理可得：

$$h_0 = \frac{-\ln A}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} \tag{38}$$

$$h_1 = \frac{-\ln B}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} \tag{39}$$

$$s = \frac{\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} \tag{40}$$

則不等式變為：

$$-h_1 + sr < T < h_0 + sr \tag{41}$$

由此可見：

$$\begin{aligned} T_A &= h_0 + sr \\ T_B &= h_1 + sr \end{aligned} \tag{42}$$

此即為計量逐次抽樣方案所要求的界限。

如果打累積失效次數 r 當做縱座標，總試驗時間 T 為橫座標，則式(42)所定義的是兩條斜率均為 s 的直線，T_A 線以下為允收區，T_B 線以上為拒收區，T_A 和 T_B 線之間為繼續試驗區。

從裝備進行壽命試驗開始，如發生第一次失效或故障，試驗時間為 $T(=t_1)$，將點 $[T,1]$ 描繪在上述座標平面上，若落入允收區或拒收區，試驗停止，做出判斷；若落入繼續試驗區，則修復後繼續試驗，到第二次失效發生，計算兩次失效累積試驗時間 $T(=t_1+t_2)$，將點 $[T,2]$ 描繪在座標平面上，重複判斷過程。如此繼續下去，直到做出允收或拒收判斷為止。

如果用 n 部裝備同時試驗，則總試驗時間為 $T=nt$，抽樣過程類似，當其中有一個發生失效時，則 $T=nt_1$，將點 $[T,1]$ 描繪在座標平面上，根據它落入那區域做出判定。由此可看出，n 部裝備同時試驗的時間比一部裝備的試驗時間縮短 n 倍。

3.3.2 無替換壽命試驗情況

如有 n 個樣品進行無替換壽命試驗，到第 r 次失效發生時，總試驗時間為：

$$T=\sum_{i=1}^{r} t_i+(n-r)t_r \tag{43}$$

由於 $(2T/\theta)$ 服從自由度為 $2r$ 的 χ^2 分佈，所以可以證明機率比仍為式(36)。由此可見，有替換和無替換壽命試驗的逐次抽樣方案基本上是一樣的，只是總試驗時間的計算上有區別，即：有更換時為 $T=nt_r$，無更換時為 $T=\sum_{i=1}^{r} t_i+(n-r)t_r$。

3.3.3 截尾逐次壽命試驗

對於給定 α、β、θ_0 和 θ_1，就可以有一個逐次壽命抽樣方案，對於品質很好和不好的產品，這種抽樣方案可以節省時間或減少抽樣數量。但是，對於中等品質的產品來說，要做出判決的試驗時間會很長，為此提出截尾逐次壽命試驗方法。

取適當的截止時間 T_c 和截尾失效次數 r_c，在 T-r 座標平面上做直線：

$$\begin{aligned} r &= r_c \\ T &= T_c \end{aligned} \tag{44}$$

再加上直線：

$$\begin{aligned} T_A &= sr+h_0 \\ T_B &= sr-h_1 \end{aligned} \tag{45}$$

由四條線圍成一個封閉的繼續試驗區，因而防止有時試驗拖得很長的現象。

截止時間 T_c 與截尾失效次數 r_c 原則上取定時截尾壽命試驗中總試驗時間和截止失效次數(即合格判定數)略大一些。由於增加了直線 $r=r_c$ 和 $T=T_c$，所以截尾逐次壽命

試驗的允收區和拒收區與未截尾的情況不同，為了使兩類風險保持不變，則相對應的拒收區和允收區發生變化(斜率不變)，一般情況下，截尾後的允收區縮小，而拒收區加大，如此會加嚴判斷決策。

4 計數型抽樣計畫

4.1 單次計數型抽樣試驗

上節已經提到，計數型抽樣試驗就是利用樣品中不合格產品的件數來判斷整批產品是否合格。設有一批產品，批量為 N，產品的不良率為 p_0，單次計數型抽樣就是從這批產品中隨機抽取一個樣本大小為 n 的樣本，經試驗得到樣本中的不合格品數，用它與合格判定數 c 比較來判斷這批產品是否合格，其抽樣檢定過程如圖 3 所示。

在制訂抽樣方案時，首先確定四個參數，生產者風險 α、使用者風險 β、操作特性曲線中分佈參數的兩個值，此處分佈參數為不良率 p，故給出 p_0 和 p_1。其中 p_0 稱為允收品質水準(acceptance quality level, AQL)，又稱合格品質水準，它是合格產品批中不良率的上限；p_1 稱為極限品質水準(limiting quality, LQ)，又稱批容許百分不良(lot tolerance percent defect, LTPD)，它是不合格產品批中不良率的下限。然後求解根據前述由 OC 曲線所建立的聯立方程式組，即：

$$\begin{aligned} L(p_0) &= 1-\alpha \\ L(p_1) &= \beta \end{aligned} \tag{46}$$

4.2 操作特性曲線的計算

批量為 N，不良率為 p 的產品，OC 函數 $L(p)$ 的計算有各種方法，下面分別討論。

4.2.1 用超幾何分佈計算允收機率

由於產品的批量為 N，不良率為 p，所以此批產品中不合格的總數為 Np 個，記為 $D = Np$。由超幾何分佈知 n 個產品中不良品個數 $X = d$ 的機率為：

$$\Pr\{X=d\} = \frac{\binom{D}{d}\binom{N-D}{n-d}}{\binom{N}{n}}, \quad d = 1,2,\ldots,\min(n,D) \tag{47}$$

因而對於抽樣方案$(N; n, c)$，其 OC 函數為：

$$L(p) = \Pr\{X \le c\} = \Pr\{X = 0\} + \Pr\{X = 1\} + \cdots + \Pr(X = c) = \sum_{d=0}^{c} \frac{\binom{D}{d}\binom{N-D}{n-d}}{\binom{N}{n}} \tag{48}$$

4.2.2 用二項分佈計算允收機率

隨著 N 的增大，用超幾何分佈計算 $L(p)$ 的工作量也增大，實際上當 N 很大，而 n 相對小時，不放回抽樣可以近似看成放回抽樣，則允收機率的計算就可以用二項分佈來近似。此時 OC 函數 $L(p)$ 為：

$$L(p) = \Pr\{X \le c\} = \sum_{d=0}^{c} \binom{n}{d} p^{d} (1-p)^{(n-d)} \tag{49}$$

4.2.3 用波桑分佈和卡方分佈計算允收機率

當 n 較大時，用二項分佈計算 $L(p)$ 仍較麻煩，假如 n 比較大，而 p 比較小，且 np 為一定值，則可用波桑分佈近似計算 $L(p)$。設 $np = \lambda$，則 OC 函數 $L(p)$ 為：

$$L(p) = \sum_{d=0}^{c} \frac{\lambda^{d}}{d!} \exp(-\lambda) = \int_{2np}^{\infty} f\left(\chi^2; 2c+2\right) d\chi^2 \tag{50}$$

其中 $f\left(\chi^2; 2c+2\right)$ 是自由度為 $(2c+2)$ 的 χ^2 分佈的機率密度函數。此一公式表示波桑分佈的 $(c+1)$ 項之和等於自由度為 $(2c+2)$ 的 χ^2 分佈機率密度函數曲線下分位數為 $2np$ 的右方面積。

4.3 計數型單次抽樣方案的分類與制訂

4.3.1 計數型單次抽樣方案的分類

前面提到，制訂一個抽樣方案，首先要給定四個參數 α、β、p_0 和 p_1，然後代入 OC 函數 $L(p)$ 的聯立方程式組，求解抽樣樣本數量 n 和合格判定數 c。這樣確定的抽樣方案稱為標準型抽樣方案，它主要適用於產品的研製階段，沒有以往資料可以參考的獨立批產品或者對產品品質要求較嚴格時，可採用此種方案。

當生產穩定並且產品品質能保持在一定水準之上時，通常產品的不良率真值不會下降到極限品質水準。因此，對連續批(批與批之間品質關係密切的連續提交的產品批)的接收和入庫等試驗中可降低要求，只要根據允收品質水準 p_0 和生產者風險 α，由方程式：

$$L\left(p_0\right) = 1 - \alpha \tag{51}$$

解出 n、c，這樣得到的抽樣方案稱為 AQL 抽樣方案。

使用單位認為抽樣方案首先應滿足使用者的要求，他們所關心的是極限品質水準 p_1 及使用者風險 β，特別當產品設計、製造、材料及工藝等發生變化時，產品的品質可能會下降，這時，為了保證使用者利益，只要由方程式：

$$L\left(p_1\right) = \beta \tag{52}$$

解出 n 和 c，這樣得到的抽樣方案稱為 LQ 抽樣方案，它適用於小批量試驗性生產，獨立提交批，產品的鑑定試驗等。

對連續提交批採用 AQL 方案不能反映對使用者的保證，通常可採用調整型抽樣方案，它是由一連串抽樣方案所組成，當產品品質正常時採用一個 AQL 抽樣方案進行試驗，當產品品質變劣或生產不穩定時，換用另一個較嚴格一點的 AQL 抽樣方案進行試驗，使犯第二類錯誤的機率小一些，促使產品品質提高；如果產品品質比所要求的品質穩定且好，則換用另外一個較寬鬆一些的 AQL 抽樣方案，使犯第一類錯誤的機率小一些。所以在產品品質確定，並且對產品品質提出要求後，採用調整型抽樣方案，必須預先制訂好三個 AQL 抽樣方案：正常、加嚴和放寬抽樣方案，然後制訂一套轉換規則進行抽樣方案之間的調整，表 2 即為一範例。

表 2: 調整型抽樣方案轉移規則,

轉移方向	轉　移　條　件
正常→加嚴	連續五批中有二批(包括試驗不到五批已發現二批)初試不合格。
加嚴→正常	連續五批初試合格。
正常→放寬	1.連續十批初試合格。 2.十批(或十批以上)樣本中不合格品數在規定界限數以下。 3.生產正常。 4.主管部門認為有必要(同意)。
放寬→正常	1.一批不合格。 2.生產不正常。 3.主管部門認為有必要。
加嚴→暫停	加嚴試驗後，不合格批數量累計到五批。

4.3.2 抽樣方案的制訂

制訂抽樣方案的原理和步驟幾乎都是一樣的，這裡以標準型抽樣方案的制訂為例介紹如下。

首先由生產者和使用者共同協商確定生產者風險α和使用者風險β，而允收品質水準p_0和極限品質水準p_1可用如下方法選取：

用最近 k 批產品的試驗記錄(不包括經初次試驗判定為不合格，重工後再提交的試驗批)，計算過程平均不良率：

$$\bar{p} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \tag{53}$$

其中n_i為第 i 批產品的樣本數量，d_i為此樣本中不合格品個數$(i = 1,2,\ldots,k)$，k 一般取 20 到 30。$\bar{p}$ 反映了生產者目前的平均品質水準，所以可取：

$$p_0 = \bar{p} \tag{54}$$

p_1主要根據使用者的需要來決定，而使用者則需要考慮產品設計等因素，對重要的產品，p_1要取得小一些；對不重要的產品，p_1可以適當大一些。另外也要考慮到若p_1選得太小，太靠近p_0，就會使抽樣數量 n 顯著增大，從而增加試驗費用，使產品的成本增加，這樣對使用者也不利。美軍標準 MIL-STD-105D 中規定極限品質水準p_1取拒收的連續提交試驗批的過程平均下限值。

4.4 計數型逐次抽樣檢定

逐次抽樣檢定方法可以在滿足兩類風險條件下，達到減小抽樣數量的目的，所以它適用於產品價格昂貴、批量小及破壞性試驗。

設有一批產品，當批產品的不合格品率為p_0時，產品品質是好的，應以高機率$1-\alpha$允收；當批產品不合格品率為p_1時，產品品質是差的，應以小機率β接收。

採用逐次抽樣檢定時，每次只從批中抽取一個單位產本，當抽樣了 n 次後$(n = 1,2,3,\ldots)$，其中包含不合格的個數為$d(n), d(n) = 1,2,3,\ldots,n$，合格品個數為$n - d(n)$。分別計算產品批的不合格品率$p_0$和$p_1$時出現這個抽樣結果的機率：

$$\begin{aligned} p' &= \Pr\{X = d(n); p = p_0\} \\ p'' &= \Pr\{X = d(d); p = p_1\} \end{aligned} \tag{55}$$

當機率比(p''/p')明顯很小時，根據最大概似原理，產品批的不合格品率為p_0的可能性很大，因而認為這批產品是合格的，應該允收該批產品；反之，當(p''/p')明顯很大時，產品批的不合格品率為p_1的可能性很大，因而認為這批產品是不合格的，應該拒收該批產品。

當(p''/p')不是明顯很小或明顯很大時，則不能判斷，繼續抽驗一個單位樣本，計算不合格品率$X = d(n+1)$，計算p'和p''，重複上述檢定過程。照此規則一直做下去，直到做出產品批是合格或不合格的判斷為止。這就是逐次抽樣試驗方法的基本原理。

制訂逐次抽樣檢定方案，就是在給定的α**、**β**、**p_0**和**p_1**條件下，定出機率比**(p''/p')**明顯很小和明顯很大的數值，即定出允收、收收和繼續試驗界限。**

為使在$p=p_0$**時允收機率為**$1-\alpha$**，**$p=p_1$**時，允收機率為**β**，**Wald **提出判斷界限可取為：**

$$A=\frac{\beta}{1-\alpha}<1 \tag{56}$$

$$B=\frac{1-\beta}{\alpha}>1 \tag{57}$$

而判斷準則為：

(1). **當**$\frac{p''}{p'}\le A$**時，允收該批產品**

(2). **當**$\frac{p''}{p'}\ge B$**時，拒收該批產品**

(3). **當**$A<\frac{p''}{p'}<B$**時，繼續抽取一個樣本進行試驗。**

用L_n**記為第**n**次抽樣的逐次機率比，則它可以表示為：**

$$L_n=\frac{{p_1}^{d(n)}(1-p_1)^{n-d(n)}}{{p_0}^{d(n)}(1-p_0)^{n-d(n)}} \tag{58}$$

由此L_n**和判斷標準** A、B**做比較，直到做出結論為止。**

計數型逐次抽樣方案還可以用圖形直觀地表示，第n**次抽驗後，若：**

$$L_n=\frac{{p_1}^{d(n)}(1-p_1)^{n-d(n)}}{{p_0}^{d(n)}(1-p_0)^{n-d(n)}}\le A \tag{59}$$

則允收該批產品，將上式兩邊取對數可解得：

$$d(n)\le\frac{\ln A-n\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \tag{60}$$

假設：

$$W = \frac{-\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \tag{61}$$

$$U = \frac{-\ln A}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \tag{62}$$

則有：

$$d(n) = nW + U \tag{63}$$

由此式可以看出在 $[n, d(n)]$ **直角座標系中為一條直線，其拒收區域在直線** $d(n) = nW + U$ **的下方。**

同理，若：

$$L_n = \frac{p_1{}^{d(n)}(1-p_1)^{n-d(n)}}{p_0{}^{d(n)}(1-p_0)^{n-d(n)}} \geq B \tag{64}$$

則拒收該批產品，將上式兩邊取對數整理可解得，

$$d(n) nW + V \tag{65}$$

其中 W **與式**(61)**同，**V**為：**

$$V = \frac{\ln B}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \tag{66}$$

同樣在 $[n, d(n)]$ **直角座標系中為一直線，其拒收區域在直線** $d(n) = nW + V$ **的上方，而在這兩條直線的中間是繼續試驗區。**

[**範例** 2] **設有一批產品需要驗收，規定：**

$\alpha = 0.05$

$\beta = 0.10$

$p_0 = 0.005$

$p_1 = 0.05$

求適合此規定的逐次抽樣方案。

[解答 2] **首先計算** A、B，**由式**(30)**得：**

$$A=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{0.10}{1-0.05}=0.1035$$

$$\ln A=-2.2513$$

$$B=\frac{1-\beta}{\alpha}=\frac{1-0.10}{0.05}=18.0$$

$$\ln B=2.8904$$

計算 W、U、V，

$$W=\frac{-\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}=\frac{-\ln\left(\frac{1-0.05}{1-0.005}\right)}{\ln\left(\frac{0.05}{0.005}\right)-\ln\left(\frac{1-0.05}{1-0.005}\right)}=0.0197$$

$$U=\frac{\ln A}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}=\frac{-2.2513}{\ln\left(\frac{0.05}{0.005}\right)-\ln\left(\frac{1-0.05}{1-0.005}\right)}=-0.9584$$

$$V=\frac{\ln B}{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)-\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}=\frac{2.8904}{\ln\left(\frac{0.05}{0.005}\right)-\ln\left(\frac{1-0.05}{1-0.005}\right)}=1.2305$$

於是逐次抽樣方案為：在抽樣第 n **個產品經試驗後，若不合格品累計數為**

(1). **若** $d(n)\le 0.0197n-0.9584$,**則允收該批產品；**

(2). **若** $d(n)\ge 0.0197n+1.2305$,**則拒收該批產品；**

(3). **若** $0.0197n-0.9584<d(n)<0.197n+1.2305$,**則繼續抽驗第** $i+1$ **個產品。**