可靠度技術手冊

可靠度模型建立技術

彭鴻霖　編著

中華民國八十九年十二月十八日

可靠度模型建立技術

目 錄

1 前 言

可靠度模型為說明系統可靠度與元件可靠度之間的關係，或者物品可靠度參數與設計參數之間關係的數學模型。可靠度規格、可靠度配當、可靠度預估及可靠度評估等，都是以可靠度模型為基礎的可靠度作業。可靠度模型正確與否，直接影響可靠度工作的成效。本報告首先說明可靠度模型的分類及可靠度方塊圖的建構步驟，其次就串聯、並聯、複聯、多重功能等常用的不可維修系統可靠度模型，以及連續監測與定期監測兩種可維修系統可靠度模型，分別說明其特性、數學模型及簡單應用案例。

2 可靠度模型概論

可靠度模型是可靠度分析工作的主要依據，例如可靠度規格訂定、可靠度需求配當、可靠度預估等作業，都需要以可靠度模型(reliability model)為基礎，可靠度模型的正確性，直接影響這些可靠度工作的成效，因此如何建立適切的可靠度模型是相當重要的工作。可靠度模型分為元件及系統兩個層次，元件可靠度模型則比較著重於工程技術的探討，系統可靠度模型較著重於機率理論的應用。以下討論可靠度模型分類及如何建立系統可靠度模型所需的可靠度方塊圖。

2.1 可靠度模型分類

可靠度模型為說明物品可靠度參數與設計參數之間關係的數學模型，或者元件可靠度與系統可靠度之間的關係，前者以物品的整體績效(performance)為主，一般稱為元件可靠度模式(component reliability model)或可靠度績效函數模式(performance function model)；後者以系統或裝備的構成元件為建立數學模型的基礎，一般稱之為系統可靠度模型(system reliability model)或可靠度方塊圖模式(block diagram model)。常見的可靠度模型歸納如圖 1 所示。

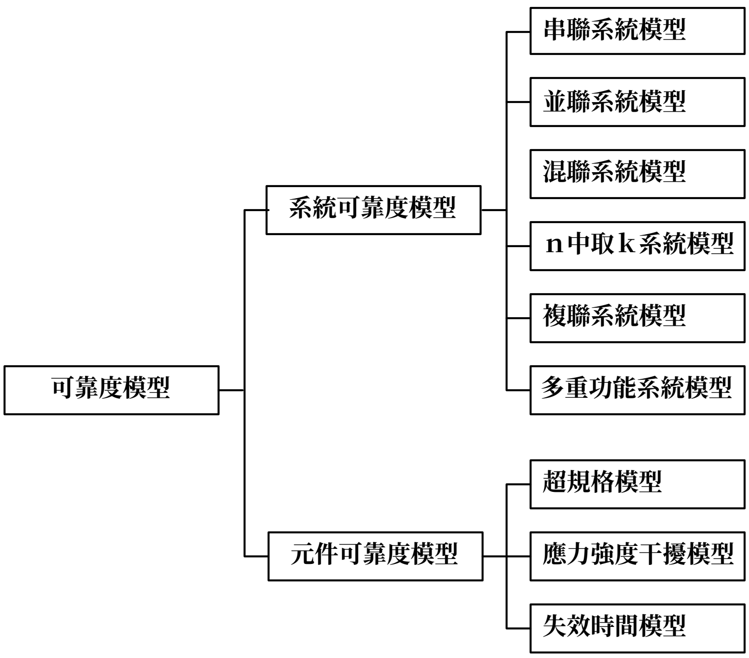


圖 1：可靠度模型之分類

元件可靠度模型則以物品績效規格需求為基礎，直接探討物品實際執行任務的績效滿足規格需求的程度。常見的元件可靠度模型包括：超規格(out of tolerance, OOT)、強度應力干擾(strength-stress interference, SSI)及失效時間(time to failure or time between failure, TTF or TBF)等。

在系統可靠度方面，有些系統在發生失效後可以進行維修作業使之恢復正常功能，有些系統則無法進行維修作業，前者稱為可維修系統，後者稱為不可維修系統。系統可靠度模型的建構基礎並不是根據系統績效滿足需要的程度直接考量其具備的可靠度水準，而是根據系統構成元件的可靠度水準，然後透過各個元件失效與系統失效之間的關係，利用元件可靠度資料計算系統可靠度。常見的系統可靠度模型包括：串聯(series)系統、並聯(parallel)系統、串並聯組合而成的混聯(combined)系統、n 中取 k(k out of n)系統、複聯(redundancy)系統及多重功能(multiple function)系統等，每一種系統模型又可分只考慮機率特性的靜態可靠度模型，以及考慮時間效應，如可維修、壽命週期、不同工作週期及不同應力水準的動態可靠度模型。

2.2 可靠度方塊圖建構步驟

在建立系統可靠度模型之前，首先應根據系統的任務需求、設計理念的特性、功能方塊圖、系統實體介面關係等資料，由上而下，然後由系統在執行任務時所扮演的角色與構成元件相互之間的關係，將每一分項視為一方塊，建立系統的可靠度方塊圖(reliability block diagram, RBD)，並且建立適切說明各方塊物品可靠度特性之間邏輯關係的數學模型。

系統可靠度方塊圖之建立首先應依據之各分項之識別編碼及相互間的關係，定義各分析分項之功能方塊圖，說明分析系統與分項之操作模式及提供功能的操作時序，以利分項任務功能分析及失效定義之用，並依各分項之功能特性及失效定義，其相互之間的串、並聯關係圖，建立系統之可靠度方塊圖。

一個完整的可靠度方塊圖建構步驟，應該包括下列項目：

(1). 標題訂定：含系統名稱的標示及任務的標示。

(2). 特性陳述：陳述該系統應用上之功能特性如距離、高度、速度、運動特性、頻率範圍及可能遭受威脅之特性，並應同時說明各項特性之容差。

(3). 操作模式陳述：利用功能方塊圖以描述該系統為達成任務目標而操作之狀況，此功能之方塊圖應顯示各種操作模式之功能流程。對電子裝備而言，則應附上線路圖。

(4). 條件陳述：用來顯示各種足以影響方塊圖含意、可靠度參數及可靠度變數選擇之限制條件，後續各種分析及綜整內容均不能違背此等條件。

(5). 成功與失效定義陳述：依據上述之條件，界定該系統成功與失效之定義。

(6). 方塊圖製作：方塊圖之製作應符合下列條件：

A. 應包括各個具邏輯順序的方塊，此等方塊應與發生在系統之成功與失效說明中所列預定操作過程之序列事件有關。

B. 該系統之每一分項均可在方塊圖中加以標示出來。

C. 每一可靠度方塊圖上的方塊均應代表該系統中一個分項的可靠度值。

D. 所有的方塊均應以串聯或並聯或其他混合方式組合而成。

E. 每一方塊均應加以標示，當著手繪製方塊時，可將所有標示均註記在圖上，當方塊多時，則可利用各層次硬品識別編碼加以註記，所有的編碼可用表在另一頁標示。

F. 各種可靠度變數及參數在應用時，應使方塊圖與可靠度變數及參數之間表現出明顯的關聯性。

(7). 可靠度方塊圖在應用時需引用一般或技術等兩種假設：

A. 一般假設

(A). 所有連接各方塊圖之線均無可靠度值；

(B). 所有方塊均代表該系統之分系統；

(C). 在人與最終物品之間並無介面問題存在；

(D). 所有人的要素均假設為完全可靠。

B. 技術假設

對每一最終物品、任務及操作模式之技術均不同，有關技術假設應在前述第(4).項所敘述的條件下加以訂定。

3 不可維修系統可靠度模型

所謂不可維修系統通常是指單次功能(one-shot)系統，或是當系統發生失效之後，不值得或不再進行維修工作，使其恢復正常工作能力。常見的不可維修系統可靠度模型包括串聯系統模型、並聯系統模型、混聯系統模型、複聯系統模型、多重功能系統模型、複雜系統模型及網路系統模型。

3.1 串聯系統可靠度模型

所謂串聯系統(series system)是指每一個系統構成元件均正常操作，全系統才算可靠。串聯系統之可靠度模型稱為串聯系統模型(series system model)，圖 2 即為串聯系統之可靠度方塊圖。

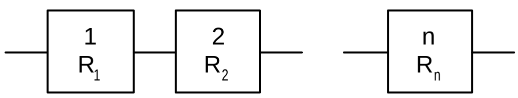


圖 2：串聯系統可靠度方塊圖

假設串聯系統由 n 個互相獨立的元件所構成，則全系統之可靠度(R_s)為各個元件可靠度(R_i)之乘積，亦即：

$$R_s = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i \tag{1a}$$

若系統是由 n 個可靠度為 R_c 元件串聯而成，則系統可靠度為：

$$R_s = \prod_{i=1}^{n} R_i = \prod_{i=1}^{n} R_c = R_c^{\,n} \tag{1b}$$

當可靠度函數直接以時間變數表示時，其數學模型可寫成：

$$R_s(t) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{1c}$$

在上式中，$t > 0$時，$0 < R_i(t) < 1$，因此系統可靠度小於任何一個元件可靠度，亦即 $R_s(t) < R_i(t), i = 1,2,\ldots,n$。

當串聯系統中最弱的元件失效，系統便告失效，因此串聯系統模型又稱為最弱鏈環模型(weakest link model)。串聯系統模型是在可靠度應用中最常使用的數學模型，在產品設計時常利用此模型來計算其可靠度，而不考慮其中是否有並聯或其他關係存在，例如美軍手冊 MIL-HDBK-217 中的零件計數法(part count method)便是依照串聯系統模型的假設所進行的可靠度預估方法，根據此一模型計算的系統可靠度值小於實際系統設計的可靠度，是一種較保守的評估結果。

3.1.1 指數分佈串聯系統

當串聯系統中的元件可靠度特性為失效時間且呈指數分佈時，亦即元件可靠度可以下式表示：

$$R_i(t) = \exp(-\lambda_i t) \tag{2}$$

式中λ_i為元件失效率。則此一串聯系統之可靠度為：

$$
\begin{aligned}
R_s(t) &= \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i t) \\
&= \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)t\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

系統的平均失效時間(MTBF)可以由式(3)可靠度函數對時間積分計算得到，亦即：

$$
\begin{aligned}
\theta_s &= \int_0^{\infty} R_s(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

另外由式(3)及(4)可知，此一系統之可靠度特性符合失效率為λ_s的指數分佈，而且系統失效率λ_s為各個元件失效率λ_i之和，亦即其間有如下之關係：

$$
\lambda_s = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{5}
$$

因此，在實務上可以不必經過式(4)複雜的積分程序，根據指數分佈失效率與平均失效時間互為倒數關係的特性，在求得系統失效率後直接由式(5)求得系統的平均失效間隔時間：

$$
\theta_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}
$$

若串聯系統中的每一個元件具有相同的可靠度(R_c)及常數失效率(λ_c)則系統可靠度(R_s)、系統失效率(λ_s)及系統平均失效時間(θ_s)分別為：

$$
R_s = \prod_{i=1}^{n} R_i = \prod_{i=1}^{n} R_c = R_c^{\,n}
$$

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_c = n\lambda_c$$

$$\theta_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{n\lambda_c}$$

[範例] 一個由 10 個獨立且完全相同的元件組成的串聯系統，每個元件的失效時間為指數分佈，其平均失效時間為 2000 小時。假設此系統在 t=0 時開始操作，求該系統在 50 小時操作任務中的可靠度。

[解答] 已知數據 n=10、t=50 hr、$\theta_c = 2000$ hr，
元件失效率為為：

$$\lambda_c = \frac{1}{2000} \text{fr/hr}$$

系統可靠度為：

$$R_s(t=50) = \left[\exp\left(-\frac{1}{2000}\times 50\right)\right]^{10} = 0.7788$$

3.1.2 壽命週期系統

由於時間具有循序不可逆的特性，因此在考慮壽命週期可靠度時，其數學模型亦屬於串聯系統模型的一種。依據系統壽命週期輪廓之定義，系統可靠度為壽命週期中各階段可靠度之乘積。例如有一系統的壽命週期由儲存、運輸、地面操作及任務飛行等五個階段所構成的，則在已知各個階段的可靠度情形下，系統的壽命週期可靠度可以由下式計算得：

$$R_{LC}(t) = R_{ST}(t)\times R_{TR}(t)\times R_{GF}(t)\times R_{FL}(t) \tag{6}$$

其中：$R_{LC}(t)$ = 系統壽命週期可靠度；
$R_{ST}(t)$ = 系統儲存可靠度；
$R_{TR}(t)$ = 系統地面運輸可靠度；
$R_{GF}(t)$ = 系統地面操作可靠度；
$R_{FL}(t)$ = 系統飛行任務可靠度。

3.2 並聯系統可靠度模型

並聯系統(parallel system)中，只要系統構成元件中有一個是正常的，全系統即正常，也就是要每一個元件都失效，全系統才算失效，其可靠度方塊圖如圖 3 所示。

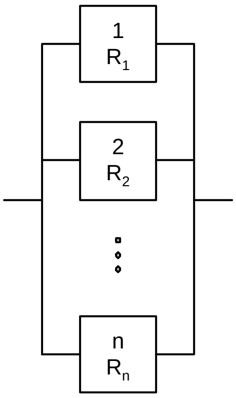


圖 3：並聯系統可靠度方塊圖

假設各元件均互相獨立，則全系統之可靠度為：

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i) \tag{7a}$$

當時間因素為顯函數時，並聯系統可靠度為：

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)) \tag{7b}$$

當 $t > 0$ **時，** $0 < R_i(t) < 1, i = 1,2,\ldots n$**，由上式可知系統可靠度大於元件可靠度，亦即** $R_s(t) > R_i(t), i = 1,2,\ldots n$。**由此可見，並聯系統為可以提高系統可靠度的設計手段。**

3.2.1 指數分佈並聯系統

假設元件的可靠度特性符合指數分佈，亦即：

$$R_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$$

則並聯系統的可靠度[$R_s(t)$]**及平均失效時間**(θ_s)**分別為：**

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - \exp(-\lambda_i t)] \tag{8}$$

$$\theta_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{9}$$

若每一個元件的失效率均相同，亦即$\lambda_i = \lambda_c$， $i = 1,2,\ldots,n$ 、**且**$\theta_i = \theta_c$**，則系統可靠度及平均失效時間可以簡化為：**

$$R_s(t) = 1 - [1 - \exp(-\lambda_c t)]^n \tag{10}$$

$$\theta_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\lambda_c} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_c}{i} \tag{11}$$

由上式可知，當 n=2 **時，系統平均失效時間為元件平均失效時間的** 1.5 **倍，當** n=3 **時，則為** 1.83 **倍。**

3.2.2 含共因失效模式並聯系統

一般討論並聯系統時都是假設元件彼此之間的失效模式是互相獨立的，實務上有些因素，例如設計缺陷、操作或維護失誤，或遭遇溫度、濕度、振動及塵土等環境條件，或是水、火、地震、龍捲風、閃電雷擊等災害，可能使由相同元件所構成的並聯系統中的各個元件同時失效，這種情形稱為共因失效模式。在建立此種系統的可靠度模型時，必須分別計算獨立失效模式與共因失效模式的可靠度，然後再相乘求得最終系統可靠度。假設元件個數為 n**、元件獨立失效模式可靠度為**$R_c(t)$**、共因失效模式可靠度為**$R_{CFM}(t)$**，則系統可靠度**$R_s(t)$**可由下式計算得：**

$$R_s(t) = \left\{1 - [1 - R_c(t)]^n\right\} R_{CFM}(t) \tag{12}$$

若元件獨立失效模式可靠度與共因失效模式可靠度均符合指數分佈，其失效率分別為λ_c**與**λ_{CFM}**，則系統平均失效時間**θ_s**為：**

$$\theta_s = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i \frac{1}{i\lambda_c + \lambda_{CFM}} \tag{13}$$

3.3 混聯系統可靠度模型

有些設計概念經過分析所建構的可靠度方塊圖，可能無法使用單純的串聯或並聯模型來表示，但是可以利用並聯與串聯作簡單合併而成的模型來分析，此即為混聯系統(combined parallel and series system)**，依照串聯與並聯的組合情形，分為先並聯後串聯**

的並串混聯系統，及先串聯後並聯的串並混聯系統。混聯系統可靠度的計算並不困難，只要從自基層的分系統開始逐級合併加以分析，即可獲得所要的結果。

3.3.1 並串混聯系統

並串混聯系統乃是先並聯後再串聯的混聯系統，其可靠度方塊圖如圖 4 所示。在建立此一混聯系統的數學模型時，首先將 m 個元件並聯的部份視為分系統，例如 $(R_{11}, R_{12}, \ldots R_{1m})$，如此可將這種混聯系統簡化為由 n 個分系統構成的串聯系統。

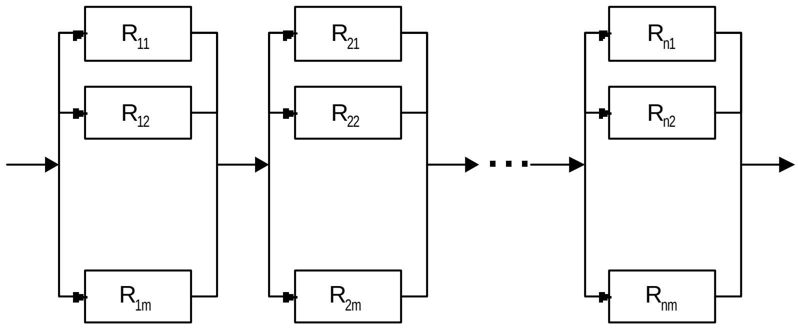


圖 4：並串混聯系統可靠度方塊圖

圖 5 所示為一由 A、B、C、D 四個元件所構成的簡單並串混聯系統，假設各個元件彼此均互相獨立，以下簡述計算系統可靠度之數學模型。

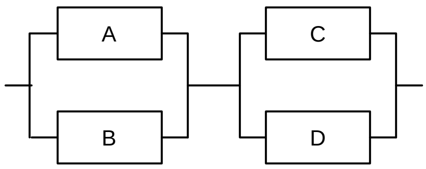


圖 5：四元件並串混聯系統可靠度方塊圖

先按簡單並聯之原則，求並聯部份 A-B 及 C-D 之可靠度， R_{AB} 及 R_{CD}：

$$
\begin{aligned}
R_{AB} &= 1-(1-R_A)(1-R_B) \\
R_{CD} &= 1-(1-R_C)(1-R_D)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

然後簡單串聯關係式計算全系統之可靠度為：

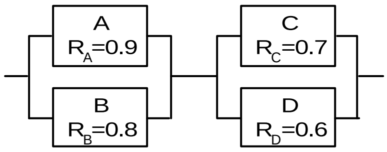
$$R_S = R_{AB} \times R_{CD} \tag{15}$$

而圖 5 中之系統，若每一元件之可靠度相同且為 R_C，則此一系統可靠度之通式為：

$$R_S = \left[1-(1-R_C)^m\right]^n$$

[範例 1] 現考慮下圖之系統，假設已知下列各個分系統的可靠度值分別為 $R_A = 0.9$、$R_B = 0.8$、$R_C = 0.7$、及 $R_D = 0.6$，求系統可靠度。

[解答]



先個別計算各個並聯分系統部份之合成可靠度,

$$\begin{aligned} R_{AB} &= 1-(1-0.9)(1-0.8) \\ &= 1-0.1\times 0.2 \\ &= 0.98 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} R_{CD} &= 1-(1-0.7)(1-0.6) \\ &= 1-0.3\times 0.4 \\ &= 0.88 \end{aligned}$$

然後再由各個相當的合成可靠度按串聯模式計算系統可靠度：

$$\begin{aligned} R_S &= 0.98\times 0.88 \\ &= 0.8924 \end{aligned}$$

3.3.2 串並混聯系統

另一種簡單的混聯情形為先串聯後並聯的串並混聯系統，其可靠度方塊圖如圖 6 所示。在建立此一混聯系統的數學模型時，首先將 m 個元件串聯的部份視為分系統，例如$(R_{11}, R_{12}, \dots R_{1m})$，如此可將這種混聯系統簡化為由 n 個分系統構成的並聯系統。

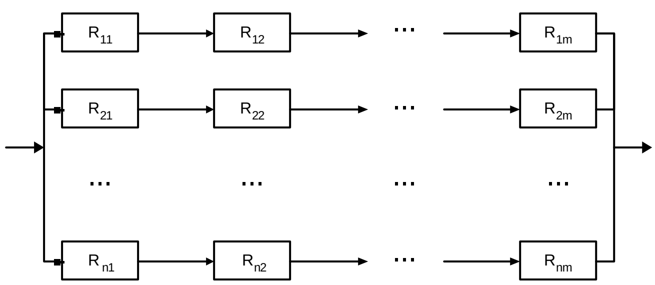


圖 6：串並混聯系統可靠度方塊圖

圖 7 所示為一由 A、B、C、D 四個元件所構成的簡單串並混聯系統，假設各個元件彼此均互相獨立，以下簡述計算系統可靠度之數學模型。

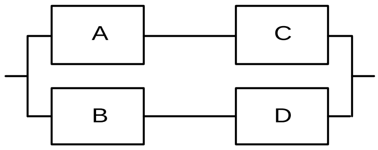


圖 7：四元件串並混聯系統可靠度方塊圖

首先按簡單串聯之原則，求並聯部份 A-C 及 B-D 之可靠度， R_{AC} **及** R_{BD} **：**

$$\begin{aligned} R_{AC} &= R_A \times R_C \\ R_{BD} &= R_B \times R_D \end{aligned} \tag{16}$$

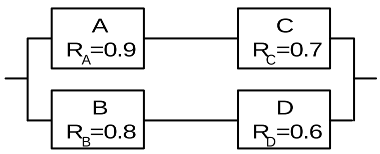
然後簡單並聯關係式計算全系統之可靠度為：

$$R_S = 1 - (1 - R_{AC})(1 - R_{BD}) \tag{17}$$

同樣，若圖 7 之系統中的每一元件均相同且其可靠度為 R_C**，則系統可靠度為：**

$$R_S = 1 - \left(1 - R_C^n\right)^m$$

[範例 2] **下圖所示之系統為由兩支串聯的分系統以並聯的方式加以組合。假設已知下列各個分系統的可靠度值分別為** $R_A = 0.9$ 、 $R_B = 0.8$ 、 $R_C = 0.7$ 、 **及** $R_D = 0.6$**，求系統可靠度。**



[解答]

先按串聯模式計算 AC 及 BD 兩個合成可靠度：

$$\begin{aligned} R_{AC} &= R_A \times R_C \\ &= 0.9 \times 0.7 \\ &= 0.63 \\ R_{BD} &= R_B \times R_D \\ &= 0.8 \times 0.6 \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

整個系統的可靠度按各個合成可靠度之並聯模式計算為：

$$
\begin{aligned}
R_S &= 1-(1-R_{AC})(1-R_{BD}) \\
&= 1-(1-0.63)(1-0.48) \\
&= 1-0.37\times 0.52 = 1-0.1924 \\
&= 0.8076
\end{aligned}
$$

從上面兩種範例可知，並串混聯系統的可靠度比串並混聯系統的可靠度高(0.8624>0.8076)，亦即複聯的觀念以低層次為佳。

3.4 複雜系統

某些設計構想可能無法適用單純的串聯、並聯或串並聯混合模式來表示，而需利用特殊的模式來分析，圖 8 所示即為複雜混合系統。

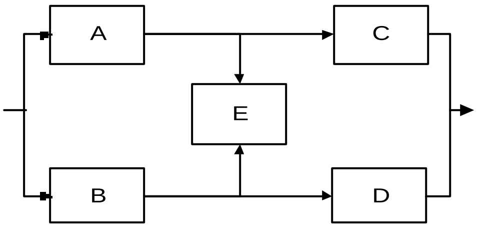


圖 8：複雜混聯系統可靠度方塊圖

常用的分析方法之一為首先從可靠度方塊圖中選取關鍵元件，然後利用貝氏定理，分兩步驟進行系統可靠度分析工作，說明如下：

由可靠度方塊圖(圖 8)可確定此一問題的關鍵元件為 E，而元件 E 的狀態可分為成功及失效兩種互斥的狀態。

狀況(1)： E 成功，此時的系統變成 A 與 B、及 C 與 D 先並聯，然後再串聯的情形；因此，狀況(1)的可靠度為：

$$
\begin{aligned}
R_{(1)} &= R_E\times[1-(1-R_A)(1-R_B)] \\
&\quad \times[1-(1-R_C)(1-R_D)]
\end{aligned} \tag{18}
$$

狀況(2)： E 失效，此時的系統變成 A 與 C、及 B 與 D 先串聯，然後再並聯的情形；因此，狀況(2)的可靠度為：

$$
\begin{aligned}
R_{(2)} &= (1-R_E)\times \\
&\quad [1-(1-R_A\times R_C)(1-R_B\times R_D)]
\end{aligned} \tag{19}
$$

狀況(1)及狀況(2)為互斥事件，因此系統可靠度為兩種狀況可靠度之和，亦即：

$$
R_S = R_{(1)} + R_{(2)} \tag{20}
$$

3.5 多重功能系統可靠度模型

對於有些複雜系統而言，在應用上可能具有一個以上的功能模式(functional mode)，此種系統稱為多重功能系統(multiple functions system)。若多重功能系統符合下述狀況之一，則可視為類似單一功能系統：

(1). 沒有任何一個元件出現一個以上的功能；

(2). 所有的功能是時間獨立的，亦即它們之間是按時間次序執行功能，或者絕不會有同時使用的可能。

若有上述(1)或(2)情形之一發生，則依下列程序進行：將每一項功能個別依照單一功能系統之程序處理，對於系統而言，每一項功能就如同一個元件，可以依照需求以串聯或並聯結合在一起，結果所繪製的方塊圖視為單一功能系統。必要時，可以個別比較每一項功能與完成該功能所需要之可靠度需求。

當系統中某些元件出現在數個功能之中，而這些功能無法個別處理時，下述範例說明這種情形：

[範例] 有一個具有兩項功能的系統，第 1 項功能需要 A 或 B 成功，第 2 項功能需要 B 或 C 成功，這兩項功能都是任務成功所必需的，功能 1、功能 2 及系統之任務可靠度方塊圖如圖 9 所示：

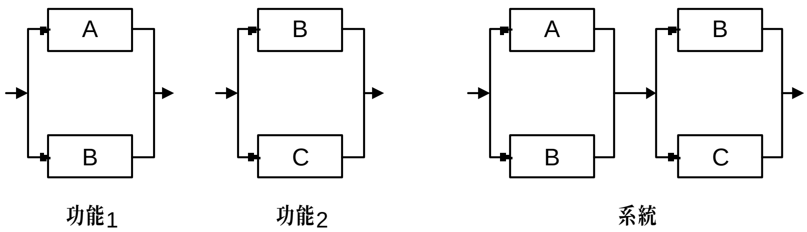


圖 9：多重功能系統可靠度方塊圖

[解答]

假設 $R_A = 0.9$， $R_B = 0.8$， $R_C = 0.7$

則每一項功能之可靠度分別為：

$$\text{功能1可靠度} = 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8$$
$$= 0.98$$

$$\text{功能2可靠度} = 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7$$
$$= 0.94$$

因為共同裝備 B 之緣故，任務可靠度不能由直接將兩個功能可能可靠度相乘而計算得，亦即：

$$\text{任務可靠度} \neq 0.98\times0.94 = 0.9212$$

$$\text{任務可靠度} = R_B + R_A R_C - R_A R_B R_C$$

此一系統之等量基本可靠度模型及數值為：

$$\text{基本可靠度} = R_A R_B R_C = 0.9\times0.8\times0.7 = 0.504$$

利用傳統機率法亦可計算多重功能系統之可靠度，系統成功機率 R_S 可以寫成：

$$R_S = \left(R_A + R_B - R_A R_B\right)\left(R_B + R_C - R_B R_C\right) \tag{21}$$

在將各個裝備之機率代入之前，此一公式必須簡化，此為使用傳統機率法計算單一功能系統及多重功能系統可靠度之基本差別。將上式展開：

$$\begin{aligned} R_S = {} & R_A R_B + R_A R_C - R_A R_B R_c \\ & + R_B R_B - R_B R_C - R_B R_B R_C \\ & - R_A R_B R_B - R_A R_B R_C \\ & + R_A R_B R_B R_C \end{aligned} \tag{22}$$

將出現兩次的相同機率項目刪除一個共同因子變成只剩下一個：

$$\begin{aligned} R_S = {} & R_A R_B + R_A R_C - R_A R_B R_C \\ & + R_B + R_B R_C - R_B R_C - R_A R_B \\ & - R_A R_B R_C + R_A R_B R_C \end{aligned} \tag{23}$$

上式加以簡化，成為：

$$R_S = R_A R_C + R_B - R_A R_B R_C \tag{24}$$

同樣的結果亦可由下式利用貝氏定理的觀念計算得：

$$
\begin{aligned}
R_S &= P(\text{當B成功時任務成功}) \times R_B \\
&\quad + P(\text{當B失效時任務成功}) \times (1-R_B) \\
&= R_B(1) + (1-R_B)R_A R_C \\
&= R_B + R_A R_C - R_A R_B R_C
\end{aligned}
\tag{25}
$$

3.6 複聯系統可靠度模型

所謂複聯(redundancy)乃是重複使用相同的功能或元件，以提高系統可靠度的設計方法。對於任務重要及複雜系統與裝備，通常都會考慮使用複聯的方式來改善或提高系統的可靠度。功能複聯可能使用不同的元件達到提高系統可靠度的目的，而元件複聯則是使用相同的元件達到提高可靠度的目的。因此，在建立複聯系統的可靠度模型時，功能複聯的難度高於元件複聯。

常用複聯的方式包括：並聯複聯(parallel redundancy)、n 中取 k 複聯(k-out-of-n redundancy)、負載分攤複聯(load-sharing redundancy)、備用複聯(standby redundancy)、多數表決複聯(majority voting redundancy)等。

3.6.1 並聯複聯系統

並聯複聯系統可靠度的思考模式及所建立的數學模型，與一般並聯系統相同。

3.6.2 備用複聯系統

在備用複聯系統中，除非原來操作中的元件發生失效，備用元件開始時並不參與操作，此種情形如圖 10 所示之例子。轉換開關(S)代表一自動感應器或其他簡單方法，可自動使 B 接替 A 的工作。例如汽車的備胎即屬備用複聯系統。

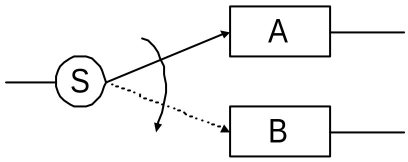


圖 10：複聯系統可靠度方塊圖

3.6.3 負載分攤複聯系統

在負荷分攤複聯系統中，任一元件發生失效，將使其他操作中元件之失效率變大。例如在汽車的車輪安裝中，若其中一個固緊螺栓損壞，其餘螺栓的受力必定增加，因之，每次螺栓損壞，均將使其他螺栓的失效率逐次增大。

3.6.4 n 中取 k 複聯系統可靠度模型

許多系統在設計時為提高使用時之可靠度採用複聯設計，當系統成功的定義為要求 n 個相同的複聯元件中至少有 k 個功能正常，這種複聯系統設計即稱為 n 中取 k 複聯

系統，如圖 11 所示為 3 中取 2 的複聯系統，圖 12 為一般 n 中取 k 的系統。此系統的可靠度需以二項式理論加以考慮。

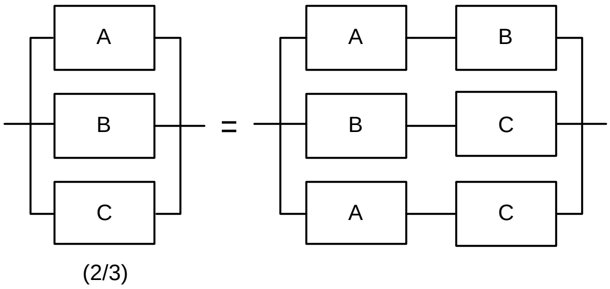


圖 11：3 中取 2 複聯系統

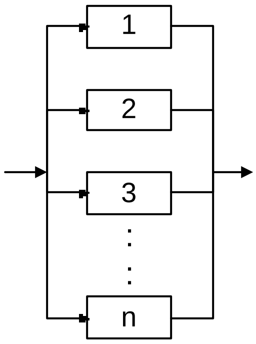


圖 12：n 中取 k 複聯系統可靠度方塊圖

假設每一元件之可靠度為 R_c，則系統可靠度為：

$$R_{(k/n)} = \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} R_c^{\,i} (1 - R_c)^{(n-i)} \tag{26}$$

從上式可看出，當 $k = 1$ 時，此系統為並聯系統；當 $k = n$ 時，系統為串聯系統。

若每一元件之常數失效率為 λ_c，則不可維修系統之近似失效率 $\lambda_{(k/n)}$ 為：

$$\lambda_{(k/n)} = \frac{\lambda_c}{\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}} \tag{27}$$

若系統的維修政策為可維修，且每一元件之維修率相同，皆為 μ_c，則系統之近似失效率 $\lambda_{(k/n)}$ 為：

$$\lambda_{(k/n)} = \frac{n!\lambda_e^{\,n-k+1}}{(k-1)\mu_e^{\,n-k}} \tag{28}$$

4 可維修系統可靠度模型

當系統設計發生可靠度問題時，有時候採用線上自測維修特色，比起改進造成問題的元件可靠度是較為實際可行的方式。視系統中所使用單機發生失效時的檢測率與維修率或更換率而定，可維修複聯系統設計的可靠度幾乎會達到上限(1)。使用時，系統維持在持續的操作狀態，複聯的單機若發生失效或故障可以進行維修或更換，只要在線上工作的單機也發生失效之前完成維修工作即可。

一般維修政策對於失效現象的監測方式可分為連續監測(continuous monitoring) 及定期監測(interval monitoring) 兩種：

(1). 連續監測

單機的失效現象在發生瞬間即可被偵測出來，並且可以馬上採取維修或更換行動，一般假設維修率為μ，φ為維修時間呈指數分佈時之平均值。

(2). 定期監測

系統每τ時間監測單機是否發生失效現象乙次，發現失效時馬上以可操作的單機替代失效了的單機，一般假設監測所需的時間以及執行更換單機所需的時間可以忽略不計。

4.1 連續監測可維修複聯系統可靠度模型

(1). 主動複聯

使用兩個相同單機的可維修複聯系統設計，若維修政策為連續監測型，其操作模式為主動複聯(active redundancy)，假設單機的失效率為λ，維修率為μ，則其可靠度函數及平均失效時間(MTBF)分別為：

A. 可靠度函數 R(t)：

$$R(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \tag{29}$$

式中 $s_1 = -\frac{1}{2}\left[(3\lambda+\mu) + \sqrt{\mu^2 + 6\mu\lambda + \lambda^2}\right]$

$$s_2 = -\frac{1}{2}\left[(3\lambda+\mu) - \sqrt{\mu^2 + 6\mu\lambda + \lambda^2}\right]$$

B. 平均失效時間(MTBF) θ：

$$\theta = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2} \tag{30}$$

(2). 備用複聯

使用兩個相同單機的可維修複聯系統設計，若維修政策為連續監測型，其操作模式為備用複聯(standby redundance)，**假設單機的失效率為** λ，**維修率為** μ，**則其可靠度函數及平均失效時間**(MTBF)**分別為：**

A. **可靠度函數** R(t)**：**

$$R(t)=\frac{s_1 e^{s_2 t}-s_2 e^{s_1 t}}{s_1-s_2} \tag{31}$$

式中 $s_1=-\frac{1}{2}\left[(2\lambda+\mu)+\sqrt{\mu^2+4\mu\lambda}\right]$

$$s_2=-\frac{1}{2}\left[(2\lambda+\mu)-\sqrt{\mu^2+4\mu\lambda}\right]$$

B. **平均失效時間**(MTBF) θ **：**

$$\theta=\frac{2\lambda+\mu}{\lambda^2} \tag{32}$$

[**範例**] **某一裝備採用兩個相同單機的可維修複聯系統設計以提高其可靠度，假設單機的** MTBF **為** 100 **小時，平均維修時間為** 10 **小時，任務時間為** 23 **小時，求下列兩種複聯操作模式之裝備可靠度。**

(1). **主動複聯,**

(2). **備用複聯。**

[**解答**]

已知： $\theta=100hr, \varphi=10hr$

$$\lambda=\frac{1}{\theta}=0.01$$

$$\mu=\frac{1}{\varphi}=0.1$$

代入公式或以 $\lambda t=0.23$ **及** $\frac{\mu}{\lambda}=10$ **查相關資料得：**

(1). **主動複聯**

$$R(t=23)=0.9760$$

(2). **備用複聯**

$$R(t = 23) = 0.9874$$

4.2 定期監測可維修複聯系統可靠度模型

使用兩個相同單機的可維修複聯系統設計，若維修政策採用定期監測方式，任務時間 t 可分為兩部份：

$$t = nT + d \tag{33}$$

其中：t = 任務時間；
T= 定期監測之週期；
n= 在任務時間內定期監測的次數；
d= 最後一次監測至任務結束之間的時間。

假設更換失效的單機或切換開關所需的時間可以忽略不計，則採用主動複聯設計及備用複聯設計的可靠度方程式分別為：

(1). 主動複聯設計

$$R(t) = \left(2e^{-\lambda d} - e^{-2\lambda d}\right)\left(2e^{-\lambda T} - e^{-2\lambda T}\right)^n \tag{34}$$

(2). 備用複聯設計

$$R(t) = (1 + \lambda T)^n (1 + \lambda d) e^{-\lambda t} \tag{35}$$

[範例] 某一裝備採用兩個相同單機的可維修複聯系統設計以提高裝備可靠度，假設單機的 MTBF 為 100 小時，採用定期監測維修政策，每 3 小時定期監測乙次，任務時間為 23 小時，求下列兩種複聯操作模式之裝備可靠度。

(1). 主動複聯,

(2). 備用複聯。

[解答]

已知：$\theta = 100\ \text{hr},\quad t = 23\ \text{hr},\quad T = 3\ \text{hr}$

所以：$n = 7\ \text{hr},\quad nT = 21\ \text{hr}$

$$d = t - nT = 23 - 21 = 2\ \text{hr}$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta} = 0.01$$

將上述各項數值代入公式，即可求得任務時間 $t = 23\ \text{hr}$ 之裝備可靠度。

(1) **主動複聯設計**

$$\begin{aligned} R(t) &= \left(2e^{-\lambda d} - e^{-2\lambda d}\right)\left(2e^{-\lambda T} - e^{-2\lambda T}\right)^{n} \\ &= \left(2e^{-0.01\times 2} - e^{-2\times 0.01\times 2}\right)\left(2e^{-0.01\times 3} - e^{-2\times 0.01\times 3}\right)^{7} \\ &= 0.9935 \end{aligned}$$

(2). **備用複聯設計**

$$\begin{aligned} R(t=23) &= (1+\lambda T)^{n}(1+\lambda d)e^{-\lambda t} \\ &= (1+0.01\times 3)^{7}(1+0.01\times 2)e^{-0.01\times 23} \\ &= 0.9967 \end{aligned}$$

5 元件可靠度模型

任何一件物品的設計，在概念定義之初首先要考慮使用者對於物品的負荷需求(load, demand, stress)為何，根據這些需求，經過系統工程設計計與細部設計的規劃與分析，確定物品設計時所必須供給或具備的能力(capacity, supply, strength)。物品的能力與需求說明了該物品的績效、功能或性能，物品喪失功能即為處於失效狀態。因此，物品的績效或功能的優劣取決於能力與需求的交絡關係，此一關係一般稱為績效函數(performance function)，是供給能力(C)及負荷需求(L)的函數，可以用下列關係式表示：

$$P = f(C, L) \tag{36}$$

當供、需處於平衡的臨界狀態時，亦即供給能力等於需求水準，在此狀態之績效函數稱為臨界狀態方程式(limit state equation)。

以傳統的設計而言，一物品是否能滿足設計需求，取決於設計的能力或供給條件是否能承受使用時所要求的最大需求條件。然而在實際設計時，通常有許多影響設計能力或使用需求條件的因素無法確定，為求安全起見，往往於設計時加上安全裕度(safety margin, SM)或乘上安全係數(safety factor, SF)，其定義分別為：$SM = C - L$ 和 $SF = C/L$。從可靠度觀點而言，安全裕度、安全係數乃是簡化後之績效函數，而臨界狀態方程式分別為 $C - L = 0$ 和 $C/L = 1$。

根據可靠度的定義可知，在特定的操作環境(E)條件下，討論規定時間(t)內物品績效函數的變化情形即為可靠度績效函數的問題，可用下式表示之：

$$\begin{aligned} R &= \Pr\{P \mid t, E\} \\ &= \Pr\{C - L \mid t, E\} \\ &= \Pr\{C/L \mid t, E\} \end{aligned} \tag{37}$$

由於可靠度績效函數說明了物品在設計時所賦與的功能和實體等基本性能參數與時間、操作環境條件之間的條件機率關係，因此以此關係式可以描述物品的可靠度，一般稱之為可靠度績效函數模型(reliability performance function model)。

傳統設計對於物品所需的安全裕度或安全係數大多憑經驗決定一確定值(deterministic value)，此種方式並沒有客觀的評估標準。為得到較客觀的設計，應將能力、需求等設計變數視為隨機變數來處理，則物品的績效函數(安全裕度或安全係數)及其相對應之可靠度亦為隨機變數，因此必須以機率理論來表示與處理。

根據定義，可靠度函數為：

$$R = \Pr\{C \geq L\}$$

物品不可靠即為失效狀態，失效機率(P_f)與可靠度(R)互為共軛值，P_f 可由干擾理論表示如下：

$$\begin{aligned} P_f &= 1 - R \\ &= \Pr\{C < L\} \\ &= \sum \Pr\{C < L \mid L = l\} \times \Pr\{L = l\} \end{aligned} \tag{38}$$

假設要求條件(L)與供給能力(C)的機率密度函數與累積分佈函數分別為 $f_L(l)$、$F_L(l)$，及 $f_C(c)$、$F_C(c)$，且如果 C 與 L 彼此互為統計獨立事件，則

$$\Pr\{C < L \mid L = l\} = \Pr\{C < L\} \tag{39}$$

當 L、C 均為連續隨機變數時，失效機率可改寫成：

$$P_f = \int F_C(l)\, f_L(l)\, dl \tag{40}$$

或

$$P_f = \int \left[1 - F_L(c)\right] f_C(c)\, dc \tag{41}$$

以上所述僅討論當失效函數為能力與需求兩個隨機變數所構成的函數時，其失效機率的計算方式。一般而言，設計時所考慮的隨機變數可能會有兩個以上，通常能力與需求均為其他多個基本設計隨機變數的函數，在這種情形下，績效函數可定義如下：

$$g(X) = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{42}$$

其中 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為由系統基本設計變數與參數所構成的向量，而 $g(X) = 0$ 則代表物品的臨界狀態方程式；當 $g(X) > 0$ 時，表示系統處於安全狀態，反之則為失效狀態。此時，失效機率可寫成下式：

$$P_f = \int_{g(X)<0} f(x)\,dx \tag{43}$$

其中 $f_X(X)$ 為X向量的聯合機率密度函數(joint probability density function)。

假設系統只有單一個失效模型，根據定義，其在某一時刻下的可靠度 R 為：

$$R = 1 - P_f = \int_{g(X)>0} f(x)\,dx \tag{44}$$

上式無論是績效函數本身的建構及可靠度函數的求解是相當複雜的過程，因此在建模解決問題之前都會先做一些假設以簡化問題。一般而言，經過簡化處理的元件可靠度模型，可依其可靠度績效函數的特性加以分類，常見的有超規格(out of tolerance,OOT)、強度應力干擾(strength-stress interference, SSI)及失效時間(time betweein failure)等三種，其中超規格模型根據規格的屬性可再分為計數型超規格與計量型超規格兩種，這種模型適於組合層次較低的物品。各種可靠度績效函數模型之間的差異如表 1 所示。

這些模型之選擇完全按照產品之特性及資料蒐集之方便性而定，有時候產品可能只適用於一種模型；也可能適用於多種模型，此時其評估之方式不同，評估結果自然也不相同。

表 1: 可靠度績效函數模型

模型名稱	數學模型	應用範圍
超規格(OOS)	$R = \Pr\{L \le X \le U\}$	功能規格有一定範圍者
強度應力干擾(SSI)	$R = \Pr\{C \ge L\}$	結構、機械產品
失效時間(TTF)	$R = \exp(-\lambda t)$	電子、長時間操作使用物品
成敗(GNG)	$R = s/n = (n-r)/n$	單次使用物品

5.1 超規格模型

超規格(out of specification, OOS)可靠度模型適用於任務需要為確定值的場合，特別是在任務期間內要求高可靠度，超過任務時間以後的功能部份除了會影響可用度外，對於實際應用上是無關重要，而且功能特性為計量型的物品。

當產品規格限制在一定之範圍內時，可以分析其功能參數之機率分佈，求其合乎規格之機率，做為可靠度值。可靠度評估模型依規格為雙邊、單邊不同而有下列三種型式，亦即：

$$R = \Pr\{L \le X \le U\} \tag{45a}$$

$$R = \Pr\{L \le X\} \tag{45b}$$

$$R = \Pr\{X \le U\} \tag{45c}$$

式中：X= 為功能參數；
L= 為功能規格下限；
U= 為功能規格上限。

當功能參數為常態分佈時，則雙邊、單邊規格之可靠度由上式可分別寫為：

$$R = \Phi\left(\frac{U-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_X - L}{\sigma_X}\right) \tag{46a}$$

$$R = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_X - L}{\sigma_X}\right) \tag{46b}$$

$$R = \Phi\left(\frac{U-\mu_X}{\sigma_X}\right) \tag{46c}$$

式中：$\Phi(\cdot)=$ **標準常態累積分佈函數,**
$\mu_X=$ **功能參數X之平均值,**
$\sigma_X=$ **功能參數X之標準差。**

5.2 強度–應力干擾模型

強度–應力干擾(strength-stress interference, SSI)**可靠性模型主要應用於供給(強度)與需要(應力)皆為不確定性的情形，對於機械和結構件或裝備而言，可靠度的定義為設計所決定之強度能夠承受使用時所遭受的最大作用力，亦即以材料之強度**(S)**和承受之應力**(L)**為可靠度績效函數之主要變數與參數，如圖** 13 **所示。**

一般而言，強度與應力皆有可能會隨時間而變化之隨機變數，亦即為隨機過程(random process or stochastic process)。

假設要求應力 L **與供給強度** S **的機率密度函數與累積分佈函數分別為** $f_L(l)$、$F_L(l)$，**及** $f_C(c)$、$F_C(c)$，**則其失效機率** P_f **可由強度與應力干擾理論表示如下**：

$$\begin{aligned} P_f &= \Pr\{C < L\} \\ &= \sum_{\text{all } l} \Pr\{C < L \mid L = l\} \Pr\{L = l\} \end{aligned}$$

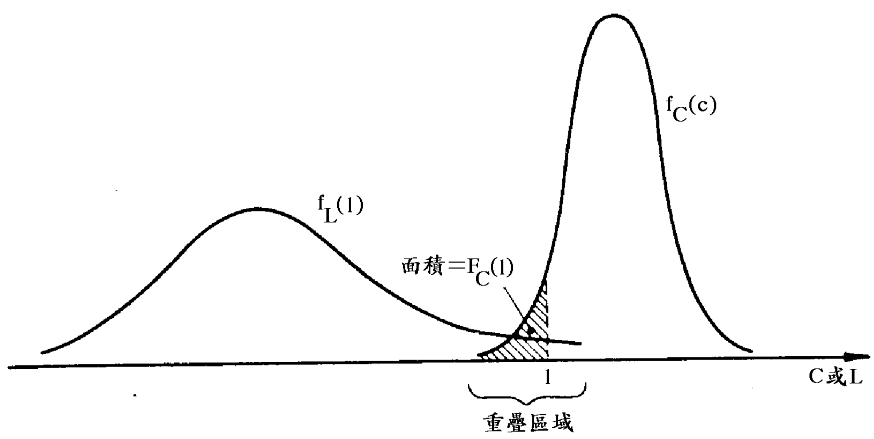


圖 13: 強度與應力干擾圖

如果強度 C 與應力 L 彼此互為統計獨立事件，則

$$P_f = \Pr\{C < L \mid L = l\} = \Pr\{C < L\} \tag{47}$$

當 C 與 L 分別為由 0 至∞之連續隨機變數時，失效機率可改寫成：

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\text{all } l} F_C(l)\, f_L(l)\, dl \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^l f_C(c)\, dc\right] f_L(l)\, dl \end{aligned} \tag{48}$$

或

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\text{all } c} \left[1 - F_L(c)\right] f_C(c)\, dc \\ &= \int_0^\infty \left[1 - \int_0^c f_L(l)\, dl\right] f_L(l)\, dl \end{aligned} \tag{49}$$

而可靠度 $R = 1 - P_f$，

$$\begin{aligned} R &= \int_{\text{all } l} \left[1 - F_C(l)\right] f_L(l)\, dl \\ &= \int_0^\infty \left[\int_l^\infty f_C(c)\, dc\right] f_L(l)\, dl \end{aligned}$$

或

$$
\begin{aligned}
R &= \int_{\text{allc}} F_L(c)\, f_C(c)\, dc \\
&= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{c} f_L(l)\, dl\right] f_C(c)\, dc
\end{aligned}
$$

上述四組可靠度與失效機率各有其應用場合，其決定因素在於強度與應力之機率變化情形，而求解可靠度或失效機率則需要應用理論分析或數值分析的技巧。一般而言，要求得精確的解析解，可能需要費相當大的功夫，甚至於有的根本不存在。若是僅求取近似解即可，則已經有數種經過驗證的方法可資應用，例如一階二次矩法(FOSM)、二階二次矩法(SOSM)等。

5.2.1 強度與應力均為常態分佈

強度與應力的機率分佈形式為何的影響因素很多，假如這些因素中並沒有特別顯著的項目時，強度與應力均為常態分佈是頗為合理的假設，若：

$$
f_C(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_C}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{c-\mu_C}{\sigma_C}\right)^2\right]
$$

$$
f_L(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{l-\mu_L}{\sigma_L}\right)\right]
$$

若績效函數為和差模式，亦即：

$$
PF = g = f(C, L) = C - L
$$

則根據機率設計理論分析結果，可得到其失效機率 P_f 分別為：

$$
\begin{aligned}
\mu_g &= \mu_{CL} = \mu_C - \mu_L \\
\sigma_g^2 &= \sigma_{CL}^2 = \sigma_C^2 + \sigma_L^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_f &= 1 - R \\
&= 1 - \Phi(\delta) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_C - \mu_L}{\sigma_{CL}}\right)
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\sigma_{CL} = \sqrt{\sigma_C{}^2 + \sigma_L{}^2} \tag{51}
$$

其中：$\Phi(\cdot)$ = 標準常態分佈函數

μ_C = 強度的平均值

σ_C = 強度的標準差

μ_L = 應力的平均值
σ_L = 應力的標準差

因此可靠度為：

$$R = 1 - P_f = \Phi\left(\frac{\mu_C - \mu_L}{\sigma_{CL}}\right) = \Phi(\delta) \tag{52}$$

$$\delta = \frac{\mu_C - \mu_L}{\sigma_{CL}} \tag{53}$$

其中δ又稱為可靠度係數(reliability index)，是採用本項模型的的可靠度指標，其意義類似安全係數，但對於可靠度的詮釋則較具體實在。

【範例】某型發動機元件所承受的應力已知為常態分佈，其平均值為 350.00 MPa，標準差為 40.00 MPa，此元件所用材料的強度，因受溫度變化以及其他因素影響亦為常態分佈，其平均值為 820.00 MPpa，標準差為 80.00 MPa，求該元件之可靠度。

【解答】已知 $\mu_L = 350.00$ MPa， $\sigma_L = 40.00$ MPa，
$\mu_S = 820.00$ MPa， $\sigma_S = 80.00$ MPa，
$\sigma_{SL}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_L^2 = 80^2 + 40^2 = 89.44^2$，
則可靠度指標δ：

$$\delta = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sigma_{SL}} = \frac{820.00 - 350.00}{89.44} = 5.25$$

由常態分佈表即可查得可靠度為 $R = 0.99999$。

【範例】傳統的安全因子(S.F.)係按平均強度與平均應力的比值計算，其值為：

$$S.F. = \frac{820.00}{350.00} = 2.34$$

假定由於熱處理不良以及環境溫度的變化甚大，使元件的強度標準差增大為 150MPa。在此種情形下，其安全係數並未改變，但其可靠度則不同。根據結合方程式，得：

$$\begin{aligned}\sigma_{SL}^2 &= \sigma_S^2 + \sigma_L^2 \\ &= 150.00^2 + 40.00^2 \\ &= 155.24^2\end{aligned}$$

$$\delta = \frac{820.00 - 350.00}{155.24} = 3.03$$

此時，可靠度指標$\delta = 3.03$，可靠度僅為 0.99877。由此可知，雖然設計之安全係數不變(SF=2.34)，當元件強度的變異增大時(σ_S由 80 Mpa 增為 150 Mpa)，可靠度指標降低(δ由 5.25 減為 3.03)，因此可靠度亦隨之減低(R 由 0.99999 減為 0.99877)。

5.2.2 強度與應力均為對數常態分佈

當強度或應力或兩者的不確定性相當大時，有時可以用對數常態分佈來加以描述。根據此一假設，強度與應力的機率密度函數分別為：

$$f_C(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_C c}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_C^2}\left(\ln\left(\frac{c}{\sigma_C}\right)\right)^2\right]$$

$$f_L(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L l}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_L^2}\left(\ln\left(\frac{l}{\sigma_L}\right)\right)^2\right]$$

若績效函數為乘積模式亦即：

$$PF = f(C, L) = \frac{C}{L}$$

則根據機率設計理論分析結果，可得到其可靠度指數δ、可靠度 R 及失效機率P_f分別為：

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{\mu_C}{\mu_L}\right)}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_L^2}}$$

$$R = \Phi(\delta)$$

$$\begin{aligned} P_f &= 1 - R \\ &= 1 - \Phi(\delta) \end{aligned}$$

由上式可知，雖然對數常態分佈的機率密度函數相當複雜，但是對於乘積模式的績效函數而言，其可靠度計算卻是相當簡單的。

5.3 失效時間模型

在應用超規格模型或強度與應力干擾模型時，基本上假設能量與需求均與時間無關，事實上有些場合即使需求面可以控制為確定值，但是供給面仍然會隨時間變化，

如此其失效機率和可靠度自然是時間的函數。由於時間變化因素不容忽視，使得可靠度參數為與時間有關的數值，一般以失效時間(time to failure, TTF)來表示可靠度變數，以失效時間為考量的可靠度模型稱為失效時間模型。此情形最常見的例子是一般物品的失效率隨著時間呈浴缸曲線。所謂失效率浴缸曲線乃是指物品的失效率在出廠後初期階段為嚴格遞減的情形，一般稱為早夭期(infant mortality period)，經過一段時間後失效率逐漸平穩呈一常數值，此階段通常稱為有用期或隨機期(useful period, random period)，最後失效率為嚴格遞增逐漸增加，此階段稱為磨耗期(wear-out period)。

對於使用的元件大多是標準化或已經發展成熟的電子裝備而言，指數分佈是可靠度分析最常使用的數學模型，其主要假設為物品失效現象遵循波桑過程(Poisson Process)，亦即：

(1). 每一時段 δt 內只發生一次失效；

(2). 每一時段 δt 內所發生的失效次數與以前所發生者無關；

(3). 在任一時段 δt 內，發生一次失效的機率與 δt 成正比，其比例常數為 λ 。

根據上述假設，可求得在時間 t 以前發生 r 次失效的機率為：

$$P(r) = \frac{(\lambda t)^r \exp(-\lambda t)}{r!} \tag{54}$$

此即為波桑分佈。

根據定義，可靠度為在時間 t 以前不發生失效之機率，亦即：

$$R = \Pr\{r = 0\} = \exp(-\lambda t) \tag{55}$$

由上式可得失效時間之機率密度函數為：

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \tag{56}$$

此式即為指數分佈。而可靠度函數為：

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

由此可知，以指數分佈為可靠度數學模型時，其原始假設為失效之發生依照波桑過程，應用時應多加小心，以免使用錯誤。

【範例】 設有一元件之失效率為 $\lambda = 5.0 \times 10^{-6}$ fr/hr，若其操作時間定為 100 小時，試求其可靠度。

【解答】 已知 $\lambda = 5.0 \times 10^{-6}$ fr/hr，因其失效率為常數，可得 t＝100 小時之可靠度為：

$$R = \exp(-\lambda t) = \exp(-0.0005) = 0.995$$

亦即當此一裝備操作到 t＝100 小時，其可靠度為 0.995。

5.4 成功失敗模型

不論是物品的可靠度變數是功能、強度或時間，當單純地以成功與失敗來論斷物品的好壞時，則可靠度變數變成為成功或失敗兩種狀態，以此為基礎所建立的可靠度模型稱為成功失敗(go-no go, GNG)模型。這種例子以失效次數(r)代表物品的可靠度變數，一般以二項式為此類隨機變數最常見的機率分佈。二項式分佈之參數為失效機率 p，其機率密度函數為：

$$f(r;n,p)=\binom{n}{r}p^{r}(1-p)^{n-r} \tag{47}$$

$$r=1,2,3,...,n$$

式中：n ＝ 為試驗樣品數
r ＝ 為失效次數
p ＝ 為產品之不可靠度

選用二項式分佈數學模型應基於下列兩項假設：

(1). 每一個產品之不可靠度(亦即失效機率)均同樣為 p，

(2). 所有樣品之測試結果均互為獨立。

根據上述模型，可以預估每一樣品之失效機率為：

$$E\left[\frac{r}{n}\right]=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^{j}(1-p)^{n-j} \\ =p \tag{58}$$

於是得到每一樣品之成功機率恰好為$1-p$，亦即：

$$R=P_s=1-p \tag{59}$$

參考文獻

1. MIL-HDBK-338-1, Electronic Reliability Design Handbook