可靠度技術手冊

常態分佈可靠度評估技術

彭鴻霖　編著

中華民國八十九年十二月十八日

常態分佈可靠度評估技術

目 錄

常態分佈可靠度評估技術

1 前言

常態分佈又叫高斯分佈，是常用的一種分佈，它是研究量測中許多偶然因素所引起的誤差而得到的一種分佈。這些偶然因素中每個的影響都很小，而且互相獨立。在一般裝備常遇到的零件尺寸、材料強度、金屬磨損、作用載荷等由許多微小且相互獨立的偶然因素引起的隨機變數，都服從常態分佈。

2 機率分佈特性

常態分佈的機率密度函數 $f_X(x)$ 與累積分佈函數 $F_X(x)$ 分別示如下：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right],-\infty<x<+\infty$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]dx$$

式中 μ_X 常態分佈的位置參數(location parameter)，$-\infty<\mu_X<+\infty$；σ_X 為常態分佈的尺度參數(scale parameter)，$\sigma_X>0$。

3 機率參數推定

3.1 平均值與標準差之點推定

常態分佈群體的參數可以根據樣本觀測數據利用最大概似法(maximum likelihood method)推定得，以下說明其推導步驟。

現從常態群體中隨機抽取一組樣本數為 n 的樣本 $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$，由於是隨機抽樣，因此樣本統計量亦為隨機變數，每一個樣本 x_i 出現的機率為 $f(x_i)dx_i$，因此 n 個樣本的概似函數 $L(\mu,\sigma)$ 為：

$$\begin{aligned} L(\mu,\sigma^2) &= [f(x_1)dx_1][f(x_2)dx_2]\cdots[f(x_n)dx_n] \\ &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx_i \\ &= \left(\frac{1}{\sigma^2 2\pi}\right)^{n/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]dx_1dx_2\cdots dx_n \end{aligned}$$

兩邊取對數後得到：

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = k-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令

$$\partial\ln L/\partial\mu = 0$$

$$\partial\ln L/\partial\sigma^2 = 0$$

由第一式可得到：

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu)=0$$

由於$\sigma^2>0$，因此求解上式可得到位置參數μ的推定值$\hat{\mu}$：

$$\hat{\mu}=\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

亦即當樣本觀測數據的群體為常態分佈時，群體平均值μ的點推定為樣本的平均值$\overline{x}$。

由第二式可得到：

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

解得群體尺度參數變異數σ^2的推定值為$\hat{\sigma}_n{}^2$：

$$\hat{\sigma}_n{}^2=s_n{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

上式中含有另外一個由樣本觀測值計算得的樣本變異數推算得的群體變異數，然而此推定值為有偏推定值，群體變異數的無偏推定值應為：

$$\hat{\sigma}_{n-1}{}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

因此群體標準差 σ 之點推定應為樣本的無偏標準差 $s_{(n-1)}$，亦即：

$$\hat{\sigma} = s_{(n-1)} = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}$$

[**範例** 1] **已知某裝備之失效時間為常態分佈，取** 20 **部裝備試驗至發生失效，失效時間分別為** 175、695、872、1250、1291、1402、1404、1713、1741、1893、2025、2115、2172、2418、2583、2725、2844、2980、3268、3538 **小時，求失效時間平均值與標準差。**

[**解答** 1] **由題意知** n=20

平均值為 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i = \frac{39104}{20} = 1955.2\text{hr}$

標準差為 $s_{(n-1)} = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i - 1955.2)^2\right] = 886.6\text{hr}$

3.2 平均值之區間推定

3.2.1 標準差為已知

假設 $X_1, X_2, \ldots X_n$ **為由常態群體** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ **隨機抽取數本數為** n **的樣本，其中** σ **為已知。根據** MLE **分析結果，樣本平均值** $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ **為群體平均值** μ **的一個無偏推定值，且為隨機變數。由於群體為常態分佈，根據常態分佈理論可知** $\hat{\mu}$ **亦為常態分佈，亦即** $\hat{\mu} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$。

將平均值推定值經標準化處理,

$$z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由標準常態分佈特性可知，當信賴水準為 γ **時，雙邊信賴界限與信賴水準之關係為：**

$$\Pr\left\{z_{(1-\gamma)/2} \le \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{(1+\gamma)/2}\right\} = \gamma$$

如圖 1 所示。

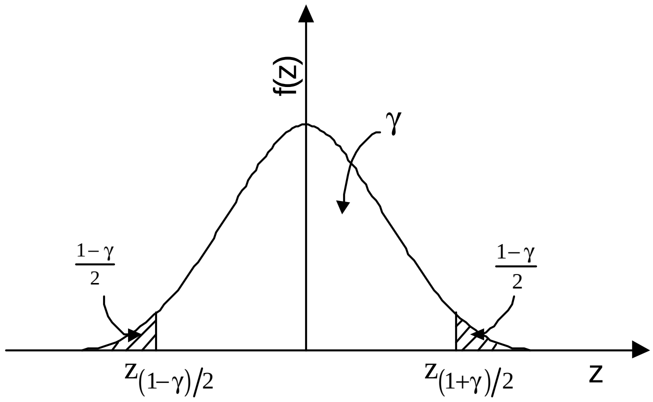


圖 1: 常態分佈之雙邊信賴區間

經整理後可得到群體平均之雙邊區間推定值為：

$$\hat{\mu} - z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \hat{\mu} - z_{(1-\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

而已知 $\hat{\mu} = \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，且 $z_{(1-\gamma)/2} = -z_{(1+\gamma)/2}$，因此上式可改寫為：

$$\bar{x} - z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

因此可知，在信賴水準 γ 下，常態分佈位置參數(平均值)的雙邊信賴界限 $[\mu_L, \mu_U]$ 為：

$$[\mu_L, \mu_U] = \left[\bar{x} - z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

一般而言，當樣本大小固定時，信賴水準增加信賴區間也會增大；當信賴水準固定時，樣本大小增加，信賴區間會縮小。從推定的觀點而言，當然是希望信賴水準高而信賴區間小。

[範例 2] 某一加工試件，已知該試件的直徑(單位為 mm)為常態分佈，根據經驗其變異數0.05，現由加工品中隨機抽取 6 件，量測其直徑分別為 10.27、10.26、9.91、9.91、10.21、9.75，試求在 0.95 信賴水準時之平均值。

[解答 2] 設 X 為試件之直徑，由題意知， $n = 6$， $\sigma^2 = 0.05$，

(1). 計算樣本平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{6}(10.27+10.26+9.91+9.91+10.21+9.75)=10.05mm$$

(2). **已知信賴水準** $\gamma=0.95$**，查常態分佈表可得到** $z_{(1+\gamma)/2}$ **：**

$$z_{(1+\gamma)/2}=z_{(1+0.95)/2}=z_{0.925}=1.96$$

(3). **計算** $z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$**，已知** $n=6$**，** $\sigma^2=0.05$**，因此**

$$z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times\sqrt{\frac{0.05}{6}}\approx 0.18$$

(4). **計算** μ **的信賴區間**

$$\begin{aligned}[\mu_L,\mu_U]&=\left[\bar{x}-z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\\&=[10.05-0.18,10.05+0.18]\\&=[9.87,10.23]\end{aligned}$$

亦即試件直徑平均值的 0.95 **信賴水準的信賴區間為** $[9.87,10.23]$。

3.2.2 標準差為未知

在實際應用上常常遇到群體變異數未知的情形，此時必須先利用樣本變異數推定群體變異數，然後利用上節的方法求解群體平均值的信賴區間。

根據抽樣分佈理論可知，統計量 $T=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ **為參數等於**(n-1)**的** t **分佈，亦即：**

$$T=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

式中 $\bar{x}$ **為樣本平均值、** s^2 **為樣本無偏變異數。**

根據信賴水準 γ **與雙邊信賴界限之關係，可得到下式：**

$$\Pr\{-t_{(1-\gamma)/2}\le t(n-1)\le +t_{(1-\gamma)/2}\}=\gamma$$

$$\Pr\left\{-t_{(1-\gamma)/2}\le\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\le +t_{(1-\gamma)/2}\right\}=\gamma$$

由此，當群體變異數未知時，根據樣本觀測數據推算得的群體平均值的信賴界限為：

$$-t_{(1-\gamma)/2} \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le +t_{(1-\gamma)/2}$$

$$\bar{x}-t_{(1-\gamma)/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+t_{(1-\gamma)/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

[**範例** 3] **已知齒輪表面硬度** X **為常態分佈，即** $X \sim N(\mu,\sigma^2)$。**現從生產線上隨機抽取** 10 **件作硬度試驗，測得硬度分別為** 262、233、225、265、285、250、266、260、267、252，**單位為** HB。**求這批齒輪表面硬度的平均值與信賴水準為** 0.99 **的信賴區間。**

[**解答** 3] **根據題意** $n=10$、 $\gamma=0.99$，**且變異數未知必須用樣本變異數** s^2 **推定群體變異數** σ^2 。

(1). **根據樣本觀測數據計算樣本平均值** $\bar{x}$ **與樣本變異數** s^2 **：**

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{10}(262+233+\cdots+252)=256.5$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\bar{x}^2\right)$$
$$=\frac{1}{10-1}\left(262^2+233^2+\cdots+252^2-10\times256.5^2\right)$$
$$\approx 324$$

(2). **求信賴水準為** 0.99 **之** $t_{(1-\gamma)/2}$ **：**

$\alpha=(1-\gamma)/2=(1-0.99)/2=0.005$，

由 t **分佈分位數表查** $t_\alpha(n-1)=t_{0.005}(9)=3.25$

(3). **確定平均值的信賴區間**

已知 $\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \le \mu \le \bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}$

因此可計算得平均值的信賴區間為：

$$[\mu_L,\mu_U]=\left[\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$
$$=\left[256.5-3.25\times\sqrt{\frac{324}{10}},256.5+3.25\times\sqrt{\frac{324}{10}}\right]$$
$$=[238,275]$$

亦即在信賴水準為 0.99 時，齒輪表面硬度平均值的信賴區間為 $[238, 275]$。

3.3 變異數區間推定

除了平均值之區間推定外，在實際問題中，有時候必須對變異數進行區間推定，亦即利用樣本觀測數據推算變異數的信賴區間，這對於生產的穩定性、產品精度與功能績效(功能可靠度)的評估是相當重要的。

假設 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是群體 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一組樣本，其中平均值 μ 為未知，以下說明在信賴水準為 γ 下，群體變異數信賴區間的推算過程。

在點推定時已討論過，樣本變異數 s^2：

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

為群體變異數 σ^2 的無偏推定值，根據抽樣分佈理論，統計量 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 為自由度等於 $n-1$ 的卡方分佈，亦即：

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

因此，信賴區間與信賴水準之間的關係為：

$$\Pr\left\{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1) \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)\right\} = \gamma$$

所以：

$$\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1) \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)$$

整理後得到：

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{(1-\gamma)/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}$$

亦即信賴水準為 γ 時，群體變異數 σ^2 的信賴區間為：

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}\right]$$

而群體標準差σ的信賴區間則為：

$$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}}s,\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}}s\right]$$

[**範例** 4] **求範例** 3 **中信賴水準為** 0.99 **下，群體變異數與群體標準差之信賴區間**。

[**解答** 4] **已知** $n=10$、$s^2=324$、$s=18$、$\gamma=0.99$，

(1). **求給定信賴水準** γ **之** $\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)$ **與** $\chi^2{}_{(1+\gamma)/2}(n-1)$ **：**

$(1-\gamma)/2=(1-0.99)/2=0.005$、$(1+\gamma)/2=(1+0.99)/2=0.995$

(2). **查卡方分佈分位數表得到：**

$\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)=\chi^2_{0.005}(9)=23.6$

$\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)=\chi^2_{0.995}(9)=1.735$

(3). **計算群體變異數之信賴區間：**

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}\right]=\left[\frac{(10-1)\times 324}{23.6},\frac{(10-1)\times 324}{1.735}\right]$$
$$=[123.56,1680.69]$$

亦即信賴水準為 0.99 **時，群體變異數的信賴區間為** $[123.56,\ 1680.69]$。

(4). **計算群體標準差之信賴區間：**

$$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}}s,\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}}s\right]=\left[\sqrt{\frac{10-1}{23.6}}\times 18,\sqrt{\frac{10-1}{1.735}}\times 18\right]$$
$$=[11.12,41]$$

亦即信賴水準為 0.99 **時，群體標準差的信賴區間為** $[11.12,\ 41]$。

4 可靠度推定

根據機率理論，可靠度函數 R 為機率參數 θ 的函數。因此，當求得參數推定值 $\hat{\theta}$ 後，可以據以推論可靠度的點推定值 $\hat{R}=R(\hat{\theta})$ 與信賴界限值。一般而言，單參數可靠度函數的期望值與變異數分別為：

$$E\left[R(\hat{\theta})\right]=R(\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$V\left[R(\hat{\theta})\right]=\left(\frac{\partial R(\hat{\theta})}{\partial\hat{\theta}}\right)^2_{\hat{\theta}=\theta}V\left[\hat{\theta}\right]+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

因此，γ 信賴水準的可靠度下限推定值為：

$$\hat{R}_L=R(\hat{\theta})-K_{(1-\gamma)/2}\sqrt{V\left[R(\hat{\theta})\right]}$$

同理，雙參數可靠度函數的期望值與變異數分別為：

$$E\left[R(\hat{\theta},\hat{\vartheta})\right]=R(\theta,\vartheta)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}V\left[R(\hat{\theta},\hat{\vartheta})\right]=&\left(\frac{\partial R(\hat{\theta},\hat{\vartheta})}{\partial\hat{\theta}}\right)^2_{\theta,\vartheta}V\left[\hat{\theta}\right]+\left(\frac{\partial R(\hat{\theta},\hat{\vartheta})}{\partial\hat{\vartheta}}\right)^2_{\theta,\vartheta}V\left[\hat{\vartheta}\right]\\&+2\left(\frac{\partial R(\hat{\theta},\hat{\vartheta})}{\partial\hat{\theta}}\right)\left(\frac{\partial R(\hat{\theta},\hat{\vartheta})}{\partial\hat{\vartheta}}\right)C\left[\hat{\theta},\hat{\vartheta}\right]+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

對於常態分佈可靠度問題，可靠度函數為：

$$\begin{aligned}R(x)&=\int_x^\infty\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx\\&=1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

其中，參數 μ 與 σ 之點推定值分別為：

$$\hat{\mu}=\overline{x}$$
$$\hat{\sigma}=s$$

4.1 單邊下限規格

對於單邊下限規格 T_L 而言，可靠範圍為 $X > T_L$，因此可靠度為：

$$\begin{aligned} R(T_L) &= \Pr\{X > T_L\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{T_L - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

因此，可靠度函數的點推定值為：

$$\begin{aligned} \hat{R}(T_L) &= \Pr\{X > T_L\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{T_L - \overline{x}}{s}\right) \end{aligned}$$

可靠度函數之變異數為：

$$V\left[\hat{R}\right] \cong \frac{\phi^2}{n}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

式中

$$\phi = \phi\left(\frac{T_L - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

因此，可靠度函數的區間下限推定值為：

$$\hat{R}_L = \hat{R} - K_{1-\gamma}\left\{V\left[\hat{R}\right]\right\}^{1/2}$$

4.2 單邊上限規格

對於單邊上限規格 T_U 而言，可靠範圍為 $X < T_U$，因此可靠度為：

$$\begin{aligned} R(T_U) &= \Pr\{X < T_U\} \\ &= \Phi\left(\frac{T_U - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

因此，可靠度函數的點推定值為：

$$\begin{aligned}\hat{R}(T_U) &= \Pr\{X < T_U\}\\ &= \Phi\left(\frac{T_U - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{T_U - \bar{x}}{s}\right)\end{aligned}$$

可靠度函數之變異數為：

$$V\left[\hat{R}\right] \cong \frac{\phi^2}{n}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T_U - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

式中

$$\phi = \phi\left(\frac{T_U - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T_U - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

因此，可靠度函數的區間下限推定值為：

$$\hat{R}_L = \hat{R} - K_{1-\gamma}\left\{V\left[\hat{R}\right]\right\}^{1/2}$$

4.3 雙邊規格

對於雙邊規格$[T_L, T_U]$**而言，可靠範圍為**$T_L < X < T_U$**，因此可靠度為：**

$$\begin{aligned}R(T_L, T_U) &= \Pr\{T_L < X < T_U\}\\ &= \Phi\left(\frac{T_U - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_L - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

因此，可靠度函數的點推定值為：

$$\begin{aligned}\hat{R}(T_L, T_U) &= \Pr\{T_L < X < T_U\}\\ &= \Phi\left(\frac{T_U - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{T_U - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{T_L - \bar{x}}{s}\right)\end{aligned}$$

可靠度函數之變異數為：

$$V\left[\hat{R}\right] \cong \frac{1}{n}\left\{\phi_U^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{T_U-\mu}{\sigma}\right)^2\right]+\phi_L^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{T_L-\mu}{\sigma}\right)^2\right]-2\phi_U\phi_L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{T_U-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{T_L-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

式中

$$\phi_U = \phi\left(\frac{T_U-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T_U-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

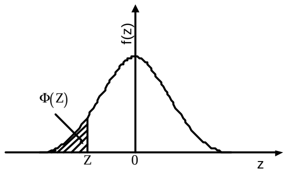
$$\phi_L = \phi\left(\frac{T_L-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T_L-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

因此，可靠度函數的區間下限推定值為：

$$\hat{R}_L = \hat{R} - K_{1-\gamma}\left\{V\left[\hat{R}\right]\right\}^{1/2}$$

附表 1: 常態分佈分位數表

$$\Phi(Z) = \Pr\left\{Z \le z\right\}$$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	Z
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	-0.0
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	-0.1
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	-0.2
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	-0.3
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	-0.4
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	-0.5
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	-0.6
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148	-0.7
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	-0.8
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	-0.9
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	-1.0
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	-1.1
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.09853	-1.2
-1.3	0.09680	0.08510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226	-1.3
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811	-1.4
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592	-1.5
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551	-1.6
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673	-1.7
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938	-1.8
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330	-1.9
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831	-2.0
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426	-2.1
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101	-2.2
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	$0.0^{2}9903$	$0.0^{2}9642$	$0.0^{2}9387$	$0.0^{2}9137$	$0.0^{2}8894$	$0.0^{2}8656$	$0.0^{2}8424$	-2.3
-2.4	$0.0^{2}8198$	$0.0^{2}7976$	$0.0^{2}7760$	$0.0^{2}7549$	$0.0^{2}7344$	$0.0^{2}7143$	$0.0^{2}6947$	$0.0^{2}6756$	$0.0^{2}6569$	$0.0^{2}6387$	-2.4
-2.5	$0.0^{2}6210$	$0.0^{2}6037$	$0.0^{2}5868$	$0.0^{2}5703$	$0.0^{2}5543$	$0.0^{2}5386$	$0.0^{2}5243$	$0.0^{2}5085$	$0.0^{2}4940$	$0.0^{2}4799$	-2.5
-2.6	$0.0^{2}4661$	$0.0^{2}4527$	$0.0^{2}4396$	$0.0^{2}4269$	$0.0^{2}4145$	$0.0^{2}4025$	$0.0^{2}3907$	$0.0^{2}3793$	$0.0^{2}3681$	$0.0^{2}3573$	-2.6
-2.7	$0.0^{2}3467$	$0.0^{2}3364$	$0.0^{2}3264$	$0.0^{2}3167$	$0.0^{2}3072$	$0.0^{2}2930$	$0.0^{2}2890$	$0.0^{2}2803$	$0.0^{2}2718$	$0.0^{2}2635$	-2.7
-2.8	$0.0^{2}2555$	$0.0^{2}2477$	$0.0^{2}2401$	$0.0^{2}2327$	$0.0^{2}2256$	$0.0^{2}2186$	$0.0^{2}2118$	$0.0^{2}2052$	$0.0^{2}1938$	$0.0^{2}1926$	-2.8
-2.9	$0.0^{2}1866$	$0.0^{2}1807$	$0.0^{2}1750$	$0.0^{2}1695$	$0.0^{2}1641$	$0.0^{2}1589$	$0.0^{2}1538$	$0.0^{2}1489$	$0.0^{2}1441$	$0.0^{2}1395$	-2.9
-3.0	$0.0^{2}1350$	$0.0^{2}1306$	$0.0^{2}1264$	$0.0^{2}1223$	$0.0^{2}1183$	$0.0^{2}1144$	$0.0^{2}1107$	$0.0^{2}1070$	$0.0^{2}1035$	$0.0^{2}1001$	-3.0
-3.1	$0.0^{3}9676$	$0.0^{3}9354$	$0.0^{3}9043$	$0.0^{3}8740$	$0.0^{3}8447$	$0.0^{3}8164$	$0.0^{3}7888$	$0.0^{3}7622$	$0.0^{3}7364$	$0.0^{3}7114$	-3.1
-3.2	$0.0^{3}6871$	$0.0^{3}6637$	$0.0^{3}6410$	$0.0^{3}6190$	$0.0^{3}5976$	$0.0^{3}5770$	$0.0^{3}5571$	$0.0^{3}5377$	$0.0^{3}5190$	$0.0^{3}5009$	-3.2
-3.3	$0.0^{3}4834$	$0.0^{3}4665$	$0.0^{3}4501$	$0.0^{3}4342$	$0.0^{3}4189$	$0.0^{3}4041$	$0.0^{3}3897$	$0.0^{3}3758$	$0.0^{3}3624$	$0.0^{3}3495$	-3.3
-3.4	$0.0^{3}3369$	$0.0^{3}3248$	$0.0^{3}3131$	$0.0^{3}3018$	$0.0^{3}2909$	$0.0^{3}2803$	$0.0^{3}2701$	$0.0^{3}2602$	$0.0^{3}2507$	$0.0^{3}2415$	-3.4
-3.5	$0.0^{3}2326$	$0.0^{3}2241$	$0.0^{3}2158$	$0.0^{3}2078$	$0.0^{3}2001$	$0.0^{3}1926$	$0.0^{3}1854$	$0.0^{3}1785$	$0.0^{3}1718$	$0.0^{3}1653$	-3.5
-3.6	$0.0^{3}1591$	$0.0^{3}1531$	$0.0^{3}1473$	$0.0^{3}1417$	$0.0^{3}1363$	$0.0^{3}1311$	$0.0^{3}1261$	$0.0^{3}1213$	$0.0^{3}1166$	$0.0^{3}1121$	-3.6
-3.7	$0.0^{3}1078$	$0.0^{3}1036$	$0.0^{4}9961$	$0.0^{4}9574$	$0.0^{4}9201$	$0.0^{4}8842$	$0.0^{4}8496$	$0.0^{4}8162$	$0.0^{4}7841$	$0.0^{4}7532$	-3.7
-3.8	$0.0^{4}7235$	$0.0^{4}6948$	$0.0^{4}6673$	$0.0^{4}6407$	$0.0^{4}6152$	$0.0^{4}5906$	$0.0^{4}5669$	$0.0^{4}5442$	$0.0^{4}5223$	$0.0^{4}5012$	-3.8
-3.9	$0.0^{4}4810$	$0.0^{4}4615$	$0.0^{4}4427$	$0.0^{4}4247$	$0.0^{4}4074$	$0.0^{4}3908$	$0.0^{4}3747$	$0.0^{4}3594$	$0.0^{4}3446$	$0.0^{4}3304$	-3.9
-4.0	$0.0^{4}3167$	$0.0^{4}3036$	$0.0^{4}2910$	$0.0^{4}2789$	$0.0^{4}2673$	$0.0^{4}2561$	$0.0^{4}2454$	$0.0^{4}2351$	$0.0^{4}2252$	$0.0^{4}2157$	-4.0
-4.1	$0.0^{4}2066$	$0.0^{4}1978$	$0.0^{4}1894$	$0.0^{4}1814$	$0.0^{4}1737$	$0.0^{4}1662$	$0.0^{4}1591$	$0.0^{4}1523$	$0.0^{4}1458$	$0.0^{4}1395$	-4.1
-4.2	$0.0^{4}1385$	$0.0^{4}1277$	$0.0^{4}1222$	$0.0^{4}1168$	$0.0^{4}1118$	$0.0^{4}1069$	$0.0^{4}1022$	$0.0^{5}9774$	$0.0^{5}9345$	$0.0^{5}8934$	-4.2
-4.3	$0.0^{5}8540$	$0.0^{5}8163$	$0.0^{5}7801$	$0.0^{5}7455$	$0.0^{5}7124$	$0.0^{5}6807$	$0.0^{5}6503$	$0.0^{5}6212$	$0.0^{5}5934$	$0.0^{5}5668$	-4.3
-4.4	$0.0^{5}5418$	$0.0^{5}5169$	$0.0^{5}4985$	$0.0^{5}4712$	$0.0^{5}4498$	$0.0^{5}4294$	$0.0^{5}4093$	$0.0^{5}3911$	$0.0^{5}3732$	$0.0^{5}3561$	-4.4
-4.5	$0.0^{5}3398$	$0.0^{5}3241$	$0.0^{5}3092$	$0.0^{5}2949$	$0.0^{5}2813$	$0.0^{5}2682$	$0.0^{5}2558$	$0.0^{5}2439$	$0.0^{5}2325$	$0.0^{5}2216$	-4.5
-4.6	$0.0^{5}2112$	$0.0^{5}2013$	$0.0^{5}1919$	$0.0^{5}1828$	$0.0^{5}1742$	$0.0^{5}1660$	$0.0^{5}1581$	$0.0^{5}1506$	$0.0^{5}1434$	$0.0^{5}1366$	-4.6
-4.7	$0.0^{5}1301$	$0.0^{5}1239$	$0.0^{5}1179$	$0.0^{5}1123$	$0.0^{5}1069$	$0.0^{5}1017$	$0.0^{6}9680$	$0.0^{6}9211$	$0.0^{6}8765$	$0.0^{6}8339$	-4.7
-4.8	$0.0^{6}7933$	$0.0^{6}7547$	$0.0^{6}7178$	$0.0^{6}6827$	$0.0^{6}6492$	$0.0^{6}6173$	$0.0^{6}5869$	$0.0^{6}5580$	$0.0^{6}5304$	$0.0^{6}5042$	-4.8
-4.9	$0.0^{6}4792$	$0.0^{6}4554$	$0.0^{6}4327$	$0.0^{6}4111$	$0.0^{6}4906$	$0.0^{6}3711$	$0.0^{6}3525$	$0.0^{6}3348$	$0.0^{6}3179$	$0.0^{6}3019$	-4.9

附表 2: t 分佈分位數表

$$\Pr\left\{|t| > t_{\alpha/2}\right\} = \alpha$$

( )中數值為單邊分位數 t_α

ν\α	0.9 (0.45)	0.8 (0.40)	0.7 (0.35)	0.6 (0.3)	0.5 (0.25)	0.4 (0.20)	0.3 (0.15)	0.2 (0.10)	0.1 (0.05)	0.05 (0.025)	0.02 (0.01)	0.01 (0.005)	0.001 (0.0005)	ν\α
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.62	1
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.9320	4.303	6.965	9.925	31.598	2
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	3
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859	5
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405	7
8	0.130	0.263	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.356	5.041	8
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.876	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	22
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767	23
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.634	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.043	2.467	2.763	3.674	28
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	6.646	30
40	0.126	0.255	0.388	0.539	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞

附表 3: 卡方分佈分位數表

ν \ α	0.99	0.95	0.90	0.80	0.50	0.20	0.10	0.05	0.01	ν \ α
1	0.0^3157	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.455	1.642	2.706	3.841	3.626	1
2	0.0201	0.103	0.211	0.446	1.386	3.219	4.605	5.991	9.210	2
3	0.115	0.352	0.584	1.005	2.366	4.642	6.251	7.815	11.345	3
4	0.297	0.711	1.064	1.649	3.357	5.989	7.779	9.488	12.277	4
5	0.554	1.145	1.610	2.343	4.351	7.289	9.236	11.070	15.068	5
6	0.872	1.635	2.204	3.070	5.348	8.558	10.645	12.592	16.812	6
7	1.239	2.167	2.833	3.822	6.346	9.803	12.017	14.067	18.475	7
8	1.646	2.733	3.490	4.594	7.344	11.030	13.362	15.507	20.090	8
9	2.088	3.325	4.168	5.380	8.343	12.242	14.634	16.919	21.666	9
10	2.558	3.940	4.865	6.179	9.342	13.442	15.987	18.307	23.209	10
11	3.053	4.575	5.578	6.989	10.341	14.631	17.275	19.675	24.725	11
12	3.571	5.226	6.304	7.807	11.340	15.812	18.549	21.026	26.217	12
13	4.107	5.892	7.042	8.634	12.340	16.985	19.812	22.362	27.688	13
14	4.660	6.571	7.790	9.467	13.339	18.151	21.064	23.635	29.141	14
15	5.229	7.261	8.547	10.307	14.339	19.311	22.307	24.996	30.578	15
16	5.812	7.962	9.312	11.152	15.338	20.465	23.542	26.296	32.000	16
17	6.408	8.672	10.85	12.002	16.338	21.615	24.769	27.587	33.409	17
18	7.015	9.390	10.865	12.857	17.338	22.760	25.989	28.869	34.805	18
19	7.633	10.117	11.651	13.716	18.338	23.900	27.204	30.144	36.191	19
20	8.260	10.851	12.443	14.578	19.337	25.038	28.412	31.410	37.566	20
21	8.897	11.591	13.240	15.445	20.337	26.171	29.615	32.671	38.932	21
22	9.542	12.338	14.041	16.314	21.337	27.301	30.813	33.924	40.289	22
23	10.196	13.091	14.848	17.187	22.337	28.429	32.007	35.172	41.638	23
24	10.856	13.848	15.659	18.062	23.337	29.553	33.196	36.415	42.980	24
25	11.524	14.611	16.473	18.940	24.337	30.675	34.382	37.652	44.314	25
26	12.198	15.379	17.292	19.820	25.336	31.795	35.563	38.885	45.642	26
27	12.879	16.151	18.114	20.703	26.336	32.912	36.741	40.113	46.963	27
28	13.565	16.928	18.939	21.588	27.336	34.027	37.916	41.337	48.278	28
29	14.256	17.708	19.768	22.475	28.336	35.139	39.087	42.557	49.588	29
30	14.953	18.493	20.599	23.364	29.336	36.250	40.256	43.773	50.892	30
40	22.164	26.509	29.051	32.352	39.335	37.263	51.805	55.758	63.391	40
60	37.485	43.188	46.459	50.647	59.335	68.969	74.397	79.082	88.379	60
80	53.540	60.391	64.278	69.213	79.334	90.403	96.578	101.879	112.329	80
100	70.065	77.929	82.358	87.950	99.334	111.667	118.498	123.342	135.807	100
200	156.432	168.279	174.835	183.006	199.333	216.618	226.021	233.994	249.445	200

附表 4: 伽瑪函數表

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1.00	1.00000	1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906
1.01	0.99433	1.26	0.90440	1.51	0.88659	1.76	0.92137
1.02	0.98884	1.27	0.90250	1.52	0.88704	1.77	0.92376
1.03	0.98355	1.28	0.90072	1.53	0.88757	1.78	0.92623
1.04	0.97844	1.29	0.89904	1.54	0.88818	1.79	0.92877
1.05	0.97350	1.30	0.89747	1.55	0.88887	1.80	0.93138
1.06	0.96874	1.31	0.89600	1.56	0.88964	1.81	0.93408
1.07	0.96415	1.32	0.89464	1.57	0.89049	1.82	0.93685
1.08	0.95973	1.33	0.89338	1.58	0.89142	1.83	0.93969
1.09	0.95546	1.34	0.89222	1.59	0.89243	1.84	0.94261
1.10	0.95135	1.35	0.89115	1.60	0.89352	1.85	0.94561
1.11	0.94740	1.36	0.89018	1.61	0.89468	1.86	0.94869
1.12	0.94359	1.37	0.88931	1.62	0.89592	1.87	0.95184
1.13	0.93993	1.38	0.88854	1.63	0.89724	1.88	0.95507
1.14	0.93642	1.39	0.88785	1.64	0.89864	1.89	0.95338
1.15	0.93304	1.40	0.88726	1.65	0.90012	1.90	0.96177
1.16	0.92980	1.41	0.88676	1.66	0.90167	1.91	0.96523
1.17	0.92670	1.42	0.88636	1.67	0.90330	1.92	0.96877
1.18	0.92373	1.43	0.88604	1.68	0.90500	1.93	0.97240
1.19	0.92089	1.44	0.88581	1.69	0.90678	1.94	0.97610
1.20	0.91817	1.45	0.88566	1.70	0.90864	1.95	0.97988
1.21	0.91558	1.46	0.88560	1.71	0.91057	1.96	0.98374
1.22	0.91311	1.47	0.88563	1.72	0.91258	1.97	0.98768
1.23	0.91075	1.48	0.88575	1.73	0.91467	1.98	0.99171
1.24	0.90852	1.49	0.88595	1.74	0.91683	1.99	0.99581

註 1：$\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$

註 2：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

例 1：$\Gamma(0.8)=\dfrac{\Gamma(1.8)}{0.8}=\dfrac{0.93138}{0.8}=1.164225$

例 2：$\Gamma(2.5)=1.5\times\Gamma(1.5)=1.5\times 0.88623=1.329345$

例 3：$\Gamma(3.4)=2.4\times 1.4\times\Gamma(1.4)=2.4\times 1.4\times 0.88726=2.9812$